Trigonometrie

von

Dr. Heinrich Willgrod

Oberlehrer an der öffentlichen Handelslehranstalt in Chemnitz

Inhaltsverzeichnis

Seite

Trigonometrie

Erstes Kapitel

1. Aufgabe der Trigonometrie 3
2. Seitenverhältnisse 3
3. Beispiel 3
4. Trigonometrische Funktionen 4
5. Berechnung einiger Funktionen 5
6. Die Funktionslinien 5
7. Bestimmung von $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$ 6
8. Formeln für die Addition der Funktionen 8
9. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln 8
10. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks 10
11. Beispiele 10
12. Das gleichschenklige Dreieck 12

Zweites Kapitel

1. Die trigonometrischen Funktionen bei stumpfen Winkeln 13
2. Sinussatz 14
3. Kosinussatz 14
4. Tangentensatz 15
5. Die vier Grundaufgaben der Dreiecksberechnung 15
6. Berechnung des Dreieckinhaltes 19
7. Berechnung von r und ϱ 19

Drittes Kapitel

Berechnung des Dreiecks aus mittelbaren Stücken 20

Trigonometrie

Erstes Kapitel

Trigonometrische Funktionen — Funktionslinien — Summen- und Differenzen-Formeln — Logarithmisch-trigonometrische Tafeln — Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks — Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks

1. Aufgabe der Trigonometrie. Während wir in der Geometrie Aufgaben durch Konstruktion gelöst haben, beschäftigt sich die Trigonometrie damit, sie auf dem Wege der Rechnung zu lösen. Das Wort Trigonometrie bedeutet wörtlich „Dreiecksmessung". Freilich haben wir auch in der Geometrie Berechnungen vorgenommen. Wir haben die Größe eines Dreieckswinkels aus der Größe der beiden anderen bestimmt, haben mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes eine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks aus den beiden anderen berechnet, den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den Seiten usw. Bei all diesen Aufgaben aber handelt es sich darum aus Winkeln wieder Winkel, aus Seiten wieder Seiten oder Inhalte zu bestimmen, während uns die Gestalt und Größe eines Dreiecks auch durch Seiten *und* Winkel, etwa 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel gegeben sein kann, also auch daraus muß berechnet werden können. Dies erscheint uns zunächst unmöglich, da wir es dabei mit verschieden benannten Größen (Meter, Grad) zu tun haben, die sich nicht ineinander überführen lassen, und wir doch immer nur mit einfach benannten und unbenannten Zahlen rechnen können.

2. Seitenverhältnisse. Da ist man nun schon früh auf den Gedanken gekommen, die Winkel durch unbenannte Zahlen zu ersetzen, wenn der Gedankengang auch ein anderer war, als der ist, den wir hier verfolgen. Wir wissen, daß sowohl rechtwinklige wie gleichschenklige Dreiecke einander ähnlich sind, wenn sie in *einem* Winkel übereinstimmen, denn sie haben dann alle Winkel gleich. Ist in den beiden rechtwinkligen Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 1) $\sphericalangle \beta = \beta_1$, so sind die beiden Dreiecke einander ähnlich und daher $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{m}{n}$; umgekehrt haben alle rechtwinkligen Dreiecke mit dem Kathetenverhältnis $\frac{m}{n}$ denselben Winkel β.

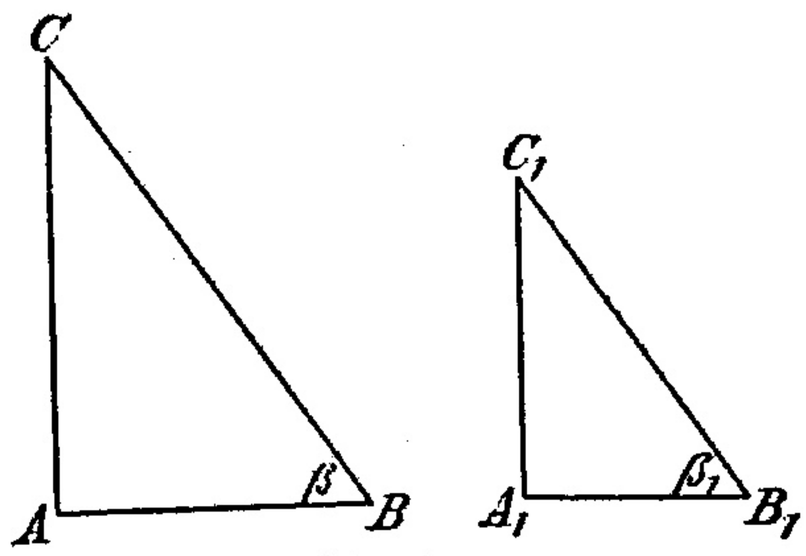


Fig. 1

Ändert sich der Winkel β, so ändert sich damit auch das Kathetenverhältnis, jedem Winkel β entspricht ein bestimmtes Kathetenverhältnis und umgekehrt jedem Kathetenverhältnis ein bestimmter Winkel β. Statt mit den Winkeln rechnen wir nun mit den entsprechenden Verhältniszahlen, so daß wir dann nur unbenannte und einfach benannte Zahlen (die Längen) haben. Ein Beispiel mag uns dies noch klarer machen.

3. Beispiel. Es soll im Felde eine Strecke AC (Fig. 2) bestimmt werden, von der nur der eine Endpunkt A zugänglich, der andere C durch einen erhöhten Gegenstand, etwa einen

Baum, sichtbar ist. Wir messen eine Strecke AB, die zu AC [illegible] ist, und mit einem Winkelmeßinstrument $\sphericalangle\beta$. Dem Winkel β entspricht ein bestimmtes Kathetenverhältnis q, dessen Wert wir aus einer Tabelle entnehmen, so daß $\frac{AC}{AB} = q$ und daraus $AC = q \cdot AB$, wodurch AC gefunden ist.

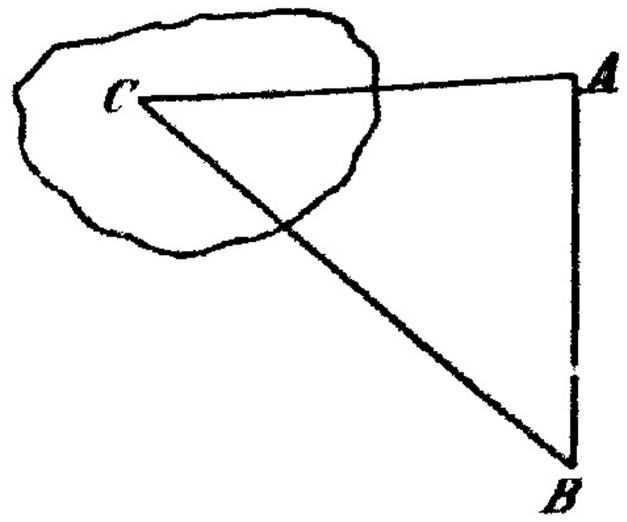


Fig. 2

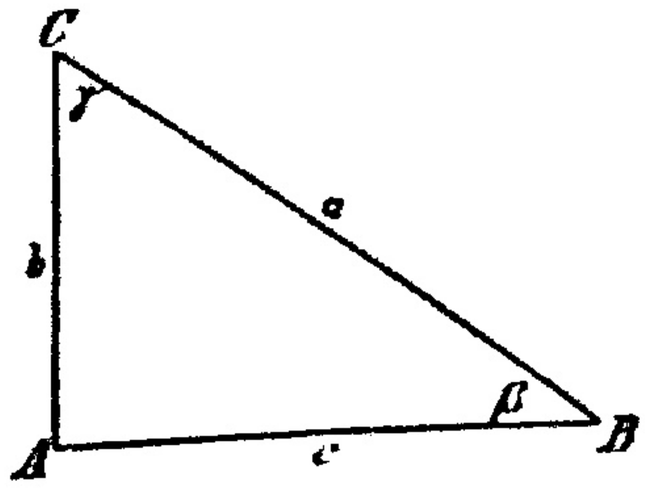


Fig. 3

4. Trigonometrische Funktionen. Aus den 3 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 3), der Hypotenuse a und den Katheten b und c können 6 Seitenverhältnisse gebildet werden:

$$\frac{b}{a}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{b}{c}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{c}{b},$$

von denen die drei letzten die reziproken Werte der drei ersten sind. Von diesen gebraucht man gewöhnlich nur 4, und zwar bezeichnet man als

sinus, abgek. sin, das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse; $\sin\beta = \frac{b}{a}$;

cosinus, „ cos, „ „ „ anliegenden „ „ „ $\cos\beta = \frac{c}{a}$;

tangens, „ tg, „ „ „ gegenüberliegenden „ „ anliegenden; $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{c}$;

cotangens, „ cotg, „ „ „ anliegenden „ „ gegenüberlieg.; $\mathrm{cotg}\,\beta = \frac{c}{b}$.

Eine Größe, die von einer zweiten abhängig ist, so daß sie sich ändert, wenn die zweite sich ändert, nennen wir eine **Funktion** der anderen. So sind sin, cos usw. Funktionen der Winkel, und zwar nennen wir sie, da sie in der Trigonometrie vorkommen, **trigonometrische Funktionen**. In der Folge wollen wir sie, da hier nur diese gemeint sein können, kurz als Funktionen bezeichnen.

$$\sin\beta = \frac{b}{a} = \cos\gamma \text{ (denn b ist für den Winkel } \gamma \text{ die anliegende Kathete)}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{c} = \mathrm{cotg}\,\gamma$$

Die Winkel β und γ machen zusammen einen Rechten aus, es sind Komplementwinkel, daher:

Der Kosinus eines Winkels ist der Sinus des Komplementwinkels oder des **Komplementes Sinus**, der Kotangens eines Winkels ist des **Komplementes Tangens**, und daraus erklären sich die Bezeichnungen cosinus und cotangens. Das Wort Sinus ist wahrscheinlich die lateinische Übersetzung eines falsch verstandenen arabischen Wortes; die Bezeichnung Tangens wird uns später klar werden.

Wie $\sin\beta = \cos\gamma$ und $\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{cotg}\,\gamma$, ist auch $\cos\beta = \sin\gamma$ und $\mathrm{cotg}\,\beta = \mathrm{tg}\,\gamma$. Nennen wir also sin und cos, tg und cotg die Kofunktionen voneinander, so können wir allgemein sagen:

Eine trigonometrische Funktion eines Winkels ist gleich der Kofunktion seines Komplementwinkels.

$$\sin\beta = \frac{b}{a};\ \cos\beta = \frac{c}{a},\ \text{daher}\ \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\beta$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ist: $a^2 = b^2 + c^2$, mithin

$$1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \sin^2\beta + \cos^2\beta,$$

wenn wir $\sin^2\beta$ für $(\sin\beta)^2$ schreiben.

Fassen wir die bisher abgeleiteten Formeln zusammen, so haben wir

$$\text{I.}\begin{cases} \sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha); & \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}(90^0 - \alpha). \\ \cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha); & \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}(90^0 - \alpha). \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad \text{III.}\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Aus den Formeln I ergibt sich, daß wir nur sin und tg der Winkel von 0^0 bis 90^0 zu berechnen haben, um damit auch die Funktionen cos und tg zu kennen. Nach III finden wir tg aus sin und cos, so daß nur sin zu berechnen bleibt, und aus II geht hervor, daß es genügt, wenn wir die Sinus aller Winkel von 0^0 bis 45^0 berechnen, um daraus mit Hilfe der angegebenen Formeln alle Funktionen der Winkel von 0^0 bis 90^0 finden zu können. Aus $\sin 20^0$ ergibt sich durch II $\cos 20^0$, wir haben damit $\sin 70^0$ usw.

5. Berechnung einiger Funktionen. In einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck seien die Katheten $= a$, so ist die Hypotenuse $a\sqrt{2}$ und

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{a}{a} = 1$$

Fällt man in einem gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seite a die Höhe $h = CD$, so zerfällt es in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, in denen die Grundlinie $= \frac{1}{2}a$, die andere Kathete $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ und die Hypotenuse $= a$; der Winkel an der Grundlinie ist 60^0, der andere spitze Winkel 30^0; daher ist

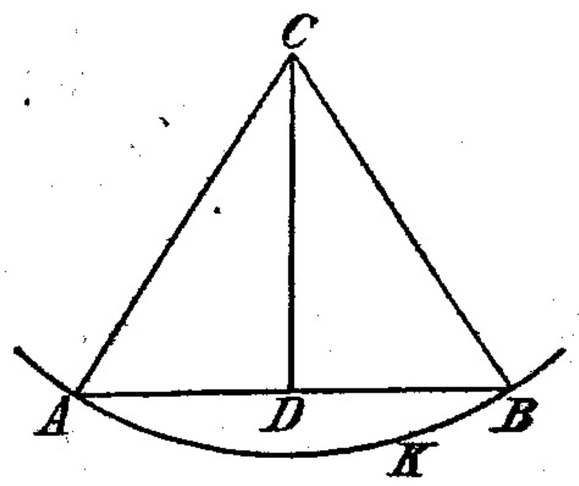


Fig. 4

$$\sin 30^0 = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2};\qquad \cos 30^0 = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 60^0 = \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3};\qquad \cos 60^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}.$$

AB (Fig. 4) sei die Seite eines dem Kreise K einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, $CD \perp AB$, so ist $\sphericalangle ACB = \frac{360^0}{n}$; $\sphericalangle ACD = \frac{180^0}{n}$. $\sin\frac{180^0}{n} = \frac{AD}{AC}$.

Für $n = 10$ ist $AB = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$ [Geometrie S. 68], also $\sin\frac{180^0}{10} = \sin 18^0 = \frac{\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)}{r} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

Wie wir aus der Seite des n-Ecks die des 2n-Ecks berechneten, so können wir vom Sinus eines Winkels zu dem des halben Winkels übergehen und so diese Funktion für einen beliebig kleinen Winkel berechnen.

6. Die Funktionslinien. In Figur 5 sei $AF \perp AD$ und mit AD als Halbmesser der Viertelkreis DCF beschrieben, $CB \perp AD$, $\sphericalangle CAB = \alpha$.

Es ist $\sin\alpha = \frac{CB}{AC}$. Nehmen wir den Halbmesser des Kreises $AC = 1$, so ist $\sin\alpha = CB$; die Strecke CB stellt uns dann den Sinus des Winkels α dar, und daher nennt man CB die Sinuslinie des Winkels α.

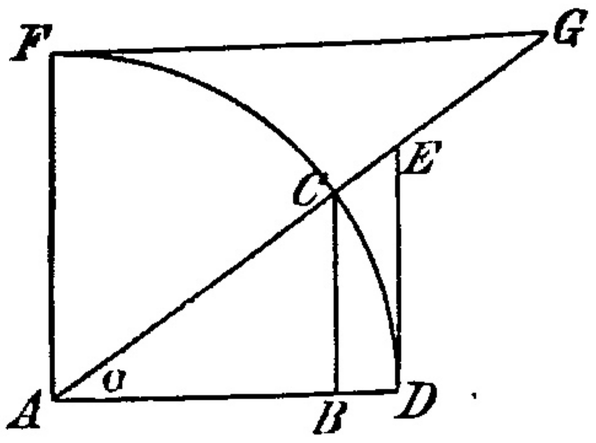


Fig. 5

$\cos\alpha = \frac{AB}{AC}$, also für $AC = 1$ ist $\cos\alpha = AB$, daher ist AB, die Projektion von AC, die **Kosinuslinie**.

Errichten wir in D das Lot DE bis zur Verlängerung von AC, so ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{1} = ED$; ED ist die **Tangenslinie** des Winkels α, und da DE Tangente an den Kreis ist, so erklärt sich daraus die Bezeichnung der trigonometrischen Funktion tg. $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{AB}{CB}$ und da $\triangle ABC \sim GFA$, ist $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{FG}{AF} = \frac{FG}{1} = FG$, so daß FG die **Kotangenslinie** ist.

Wird $\sphericalangle\alpha$ (Fig. 6) immer kleiner, so wird auch sin α immer kleiner und kommt dem Bogen immer näher. Je kleiner $\sphericalangle\alpha$ ist, um so weniger unterscheidet sich sin α vom Bogen α, bleibt aber immer kleiner als dieser. Ist der Winkel $\alpha = 0$, so ist auch das Lot $= 0$, also $\sin 0^0 = 0$; beim Wachsen von α wächst $\sin\alpha$ zunächst stark, fast in demselben Maße wie α, später weniger, und in der Nähe von $\alpha = 90^0$ ist das Wachsen von $\sin\alpha$ ganz unbedeutend. Für $\alpha = 90^0$ fällt CB mit FA zusammen, es ist also $\sin 90^0 = 1$.

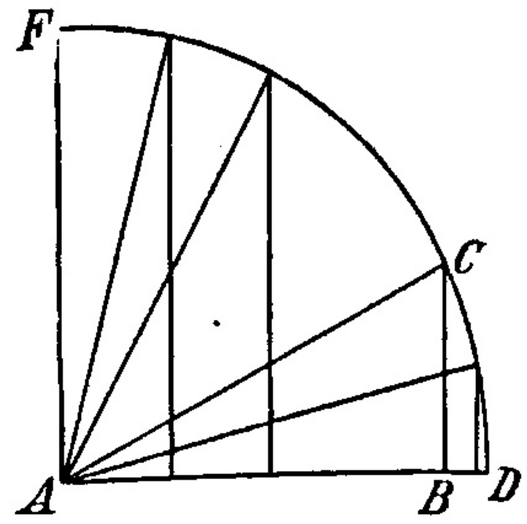


Fig. 6

Gerade umgekehrt verhält es sich mit dem Kosinus, der Linie AB. Diese fällt für $\alpha = 0^0$ mit AD zusammen, $\cos\alpha = 1$, mit dem Wachsen von α nimmt cos α erst wenig, dann in fortwährend steigendem Maße ab, und für $\alpha = 90^0$ ist $AB = 0$, mithin $\cos 90^0 = 0$.

$\sin 0^0 = 0$; mit wachsendem Winkel steigt $\sin\alpha$ erst schnell, dann immer langsamer; $\sin 90^0 = 1$.
$\cos 0^0 = 1$; mit wachsendem Winkel nimmt $\cos\alpha$ erst wenig, dann immer mehr ab; $\cos 90^0 = 0$.

Da sich ein Winkel aus einer trigonometrischen Funktion um so genauer bestimmen läßt, je schneller diese ihren Wert ändert, so ergibt sich aus dem vorigen, daß man kleine Winkel möglichst durch den Sinus, große durch den Kosinus zu bestimmen hat.

Die Tangenslinie ist für $0^0 = 0$, $\operatorname{tg} 0^0 = 0$, steigt dann immer mehr, ist für $\alpha = 45^0$ gleich AD, $\operatorname{tg} 45^0 = 1$ und wächst mit der Annäherung an $\alpha = 90^0$ über jede Größe hinaus; $\operatorname{tg} 90^0 = \infty$ (unendlich groß).

Bei steigendem Winkel wachsen sin und tg, cos und cotg nehmen ab; die Funktionen wachsen, die Kofunktionen nehmen ab.

7. Bestimmung von $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$.

Es sei (Fig. 7) $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle CAD = \beta$, also $\sphericalangle CAB = \alpha + \beta$, wobei $\sphericalangle \alpha + \beta < R$, $CB \perp AB$, $CD \perp AD$, $DE \perp AE$. Dann ist $\sphericalangle DCB = \alpha$, da die Schenkel dieser Winkel in demselben Sinne paarweise aufeinander senkrecht stehen. Ziehen wir noch $DF \perp BC$, so ist:

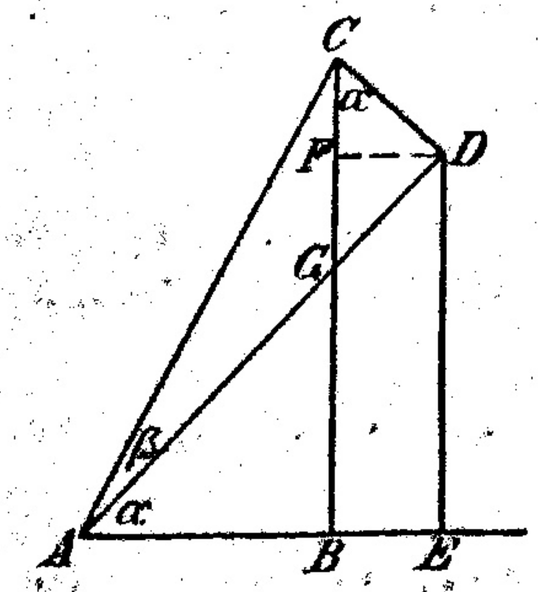


Fig. 7

Aus $\triangle EDA$: $\sin\alpha = \frac{DE}{AD}$; $DE = \sin\alpha \cdot AD$ (1.

$\cos\alpha = \frac{AE}{AD}$; $AE = \cos\alpha \cdot AD$ (2.

Aus $\triangle FDC$: $\sin\alpha = \frac{FD}{DC}$; $FD = \sin\alpha \cdot DC$ (3.

$\cos\alpha = \frac{FC}{DC}$; $FC = \cos\alpha \cdot DC$ (4.

und $\sin(\alpha+\beta) = \frac{BC}{AC} = \frac{BF+FC}{AC} = \frac{DE+FC}{AC} = \frac{DE}{AC} + \frac{FC}{AC}$

also nach 1) und 4) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \frac{AD}{AC} + \cos\alpha \cdot \frac{DC}{AC}$.

IV. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Ebenso ist: $\cos(\alpha+\beta)=\frac{AB}{AC}=\frac{AE-BE}{AC}=\frac{AE-FD}{AC}=\frac{AE}{AC}-\frac{FD}{AC}$

also nach 2) und 3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,.\,\frac{AD}{AC}-\sin\alpha\,.\,\frac{DC}{AC}$

V. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$

In ähnlicher Weise können wir uns $\sin(\alpha-\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$ ableiten.

Es sei $\sphericalangle DAB=\alpha$ (Fig. 8), $\sphericalangle CAD=\beta$, also $\sphericalangle CAB=\alpha-\beta$. Wir ziehen, wie vorher $CB\perp AB$, $CD\perp AD$, $DE\perp AB$, $DF\perp BC$, so bleiben alle früheren Bezeichnungen erhalten, insbesondere die Gleichungen 1) bis 4), und es ist

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{BC}{AC}=\frac{BF-FC}{AC}=\frac{DE-FC}{AC}=\frac{DE}{AC}-\frac{FC}{AC}.$$

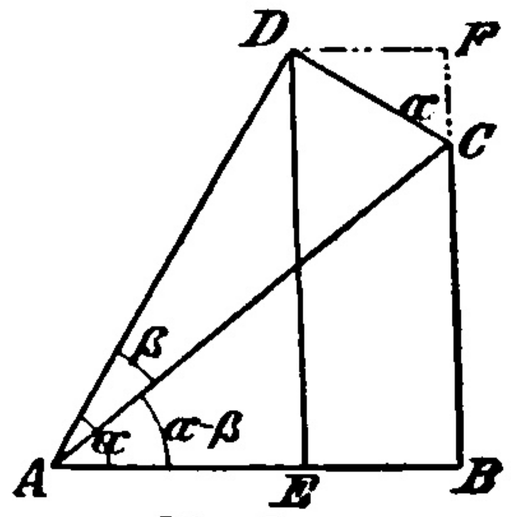


Fig. 8

Nach 1) und 4) $(\sin\alpha-\beta)=\sin\alpha\,.\,\frac{AD}{AC}-\cos\alpha\frac{DC}{AC}.$

IVa $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{AB}{AC}=\frac{AE+EB}{AC}=\frac{AE+DF}{AC}=\frac{AE}{AC}+\frac{DF}{AC}.$$

Nach 2) und 3) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\,.\,\frac{AD}{AC}+\sin\alpha\,.\,\frac{DC}{AC}.$

Va. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$

Die in dieser Nummer abgeleiteten Gleichungen lassen sich zusammenfassen in die beiden Formeln:

IV. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta.$

V. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$

Setzen wir $\beta=\alpha$, so gehen die Summenformeln über in:

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

oder wenn wir α statt 2α und somit $\frac{\alpha}{2}$ für α nehmen: $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

und

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1.$$

Aus der vorletzten Gleichung ist

$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha;\ \sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

aus der letzten Gleichung

$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha;\ \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

oder wenn wir in beiden $\frac{1}{2}\alpha$ statt α nehmen:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad\cos\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Wir können demnach den früheren Formeln noch hinzufügen:

VI. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$ **VIa.** $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$

VII. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$

VIII. $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}};$ **VIIIa.** $\sin\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$

IX. $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}};$ **IXa.** $\cos\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$

Mit Hilfe der Formeln IV und VI können wir aus dem Sinus eines Winkels den Sinus eines beliebigen Vielfachen dieses Winkels berechnen, und da wir in Nr. 4 gezeigt haben, wie wir den Sinus und damit auch den Cosinus eines beliebig kleinen Winkels finden können, so sehen wir die Möglichkeit, die trigonometrischen Funktionen für alle Winkel von 0° und 90° zu bestimmen, die in gewissen gleichen Zwischenräumen aufeinander folgen. Wir können eine Tabelle zusammenstellen, aus der wir beim Rechnen die entsprechenden Zahlen entnehmen.

8. Formeln für die Addition der Funktionen.

Die Formeln IV sind, wenn wir die Winkel mit a und b bezeichnen:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Durch Addition bez. Subtraktion ergibt sich

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$
$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b.$$

Setzen wir $a+b=\alpha$ und $a-b=\beta$, so ist, wie wir daraus durch Addition und Subtraktion erhalten, $a=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $b=\frac{\alpha-\beta}{2}$ und die Gleichungen gehen über in:

$$\textbf{Xa.}\quad \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\textbf{Xb.}\quad \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ebenso ist:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

also
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$
$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$$

und wenn wir die gleichen Einsetzungen wie vorhin vornehmen:

$$\textbf{XIa.}\quad \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\textbf{XIb.}\quad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

9. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Für die Ausführung von trigonometrischen Rechnungen ist es im allgemeinen bequemer, statt der Funktionen selbst ihre Logarithmen zur Verfügung zu haben, und so sind es auch diese, die man vornehmlich in den Tafeln zusammengestellt findet. Die Zahl der Mantissenstellen muß gleich sein der der gebrauchten Zahlenlogarithmen. Wir werden daher, wie früher in der Arithmetik, auch hier vierstellige Mantissen verwenden, die eine genügende Genauigkeit gewähren. Den folgenden Angaben und Berechnungen sind die vierstelligen Logarithmentafeln von Schülke (Leipzig, B. G. Teubner, geh. 60 ₰, geb. 90 ₰) zugrunde gelegt, auf die damit zugleich hingewiesen sein möge.

Die Einrichtung der Tafeln ist die gleiche, wie diejenige, die wir für die Zahlen in der Arithmetik (Teil II, Seite 113) angegeben haben. Der Grad ist nicht in Minuten und Sekunden, sondern nach dem Dezimalsystem geteilt. Ist uns ein Winkel in Grad, Minuten und Sekunden gegeben, so haben wir die Minuten und Sekunden durch Division in einen Bruch von Grad zu verwandeln und können, wenn die Aufgabe es verlangt, die erhaltenen Bruchteile eines Grades durch Multiplikation in Minuten und Sekunden umwandeln, wie es im Rechnen (Teil I, Seite 70) geübt wurde.

$$23^0\,42'\,27'' \qquad\qquad 48^0{,}942$$
$$\overset{60)}{\text{———}}\qquad\qquad \overline{56{,}52}\cdot 60$$
$$42{,}45 \qquad\qquad \overline{31{,}2}\cdot 60$$
$$\overset{60)}{\text{———}}\qquad\qquad 31{,}2$$
$$23{,}70\,75^0 \qquad\qquad 48^0\,56'\,31''$$

Die Sinus und Kosinus sind immer, die Tangens von Winkeln unter 45^0 und die Cotangens von Winkeln über 45^0 echte Brüche, ihre Logarithmen also negativ, doch können wir nach „Arithmetik" II, S. 112 die Mantisse positiv schreiben.

$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2} = 0{,}5; \quad \log\sin 30^0 = \log 0{,}5 = 0{,}6990 - 1.$$

Da aber durch das Schreiben der negativen Kennziffer viel Platz beansprucht würde, erhöht man die negative Kennziffer auf 10, schreibt also $\log\sin 30^0 = 9{,}6990 - 10$ und läßt in der Tabelle -10 fort.

Auf den Seiten 4 und 5 der Schülkeschen Tabellen finden wir die Sinus der Winkel von 0^0 bis 90^0 in Zwischenräumen von Zehntel-Graden angegeben (die Gradzahlen stehen links, die Zehntel über den einzelnen Spalten), die Hundertstel-Grade berücksichtigen wir in derselben Weise, wie es bei den 4. Stellen der Zahlen für das Aufsuchen der Logarithmen geschah.

1) log sin $27{,}46^0 = ?$

log sin $27{,}4^0 = 9{,}6629 - 10$ (Zeile 27, Spalte 4 der Tabelle; 9 ist in der ersten Spalte vorgedruckt). Der Unterschied zwischen 6629 und der nächsten Zahl 6644 ist 15 auf $0{,}1^0$, somit 1,5 auf $0{,}01^0$ und auf 6 Hundertstel Grad 1,5 . 6 = 9. 9 zu 6629 gibt 6638, so daß log sin $27{,}46^0 = 9{,}6638 - 10$.

2) log sin $\alpha = 9{,}5246 - 10$; $\alpha = ?$

Die nächst niedere Zahl der Tabelle, 9,5235 gibt $19{,}5^0$. Die Differenz in der Tabelle von der nächsten Zahl ist $56 - 35 = 21$, die Differenz zwischen dem gegebenen Logarithmus und 5235 ist $46 - 35 = 11$; als 2. Dezimalstelle erhalten wir daher 11 : 2,1 oder $110 : 21 = 5$, somit ist $\sphericalangle \alpha = 19{,}55^0$.

Auf Seite 6 und 7 sind in der gleichen Weise die log tg angegeben.

3) log tg $77{,}28^0 = ?$

log tg $77{,}2^0 = 0{,}6436$. Differenz $71 - 36 = 35$, daher ist zu den beiden letzten Stellen zu addieren 3,5 . 8 = 28 und log tg $77{,}28^0 = 0{,}6464$.

4) log tg $\alpha = 0{,}2185$; $\alpha = ?$

Die nächst niedere Zahl der Tabelle ist 0,2178 und gibt $58{,}8^0$. Die Differenz in der Tabelle ist $95 - 78 = 17$, unsere Differenz $85 - 78 = 7$, daher haben wir als 2. Dezimalstelle $70 : 17 = 4$, also $\alpha = 58{,}84^0$.

Um log cos α zu bestimmen, könnten wir α von 90^0 abziehen und von $90^0 - \alpha$ den Sinus aufsuchen, da Kofunktionen bei Komplementwinkeln einander gleich sind. Damit wir uns diese Subtraktion ersparen, ist das Komplement der Grade in der letzten Spalte rechts angegeben, die Ergänzung der Zehntel unten. Nehmen wir also die Grade rechts, die Zehntel unten, so erhalten wir log cos des betreffenden Winkels oder log cotg in der tg-Tabelle.

5) log cos $47{,}27^0 = ?$

log cos $47{,}2^0 = 9{,}8322 - 10$ (die Zeile, die rechts 47, und die Spalte, die unten 2 hat). Der nächste Wert für log cos ist der links von 8322 stehende 8313. Der Kosinus nimmt ab! Die Differenz ist 9, für 7 erhalten wir also 0,9 . 7 = 6,3 und haben 6 von 8322 zu subtrahieren.

log cos $47{,}27^0 = 9{,}8316 - 10$.

6) log cotg $\alpha = 9{,}5578 - 10$; $\alpha = ?$

Die nächst höhere Zahl in der tg- und cotg-Tabelle ist 9,5587 (die höhere, da auch cotg bei zunehmendem Winkel abnimmt) und gibt $70{,}1^0$ (70 rechts, 1 unten). Die Differenz von der folgenden Zahl 5563 (nach links) ist $87 - 63 = 24$, unsere Differenz $87 - 78 = 9$, folglich ist die 2. Dezimalstelle $90 : 24 = 4$ und $\sphericalangle \alpha = 70{,}14^0$.

Regel: Bei sin und tg (links, oben) muß man die Werte für die Hundertstel Grad addieren, bei cos und cotg (rechts, unten) subtrahieren. Beim Aufschlagen der Winkel nimmt man bei sin und tg zunächst den nächst niederen, bei cos und cotg den nächst höheren Logarithmus, sucht bei sin und tg die Differenz nach rechts, bei cos und cotg nach links.

Da sin und tg kleiner Winkel schnell wachsen, sind noch auf den Seiten 8 und 9 die Logarithmen dieser Funktionen von 0^0 bis 5^0 angegeben für einen Zwischenraum von $0{,}01^0$, wobei die Tausendstel Grad durch die Differenzen bestimmt werden.

7) log sin $3{,}546^0 = ?$

log sin $3{,}54^0 = 8{,}7906$. Differenz 12, zu addieren 1,2 . 6 = 7,2

log sin $3{,}546^0 = 8{,}7913$.

8) log tg $\alpha = 8{,}2964 - 10$; $\alpha = ?$

Zu 8,2950 gehört $1{,}13^0$; Differenz in der Tabelle 38, unsere Differenz 14; daher ist die dritte Dezimale $140 : 38 = 4$. $\alpha = 1{,}134^0$.

Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, die in ähnlicher Weise eingerichtet sind, sind die von Heger (Leipzig, Teubner), nur ist dort der Grad in Minuten und Sekunden geteilt. Sinus und Tangens sind von 0^0 bis 6^0 von 10 zu 10 Sekunden, von da an für die einzelnen Minuten angegeben; die Sekunden sind durch die Differenzen zu bestimmen.

9) log sin $27^0\,23'\,44'' = ?$

Nach den Tafeln ist log sin $27^0\,23' = 9{,}66270 - 10$. Die Differenz ist 25 für 1' oder 60", daher für 44" $\frac{25 \cdot 44}{60} = 18$ und log sin $27^0\,23'\,44'' = 9{,}66288 - 10$.

10) log cotg $\alpha = 0{,}23576$; $\alpha = ?$
0,23594 gibt $30^0\,9'$. Differenz 29 auf 60", unsere Differenz 18 entspricht daher $\frac{60 \cdot 18}{29} = 35''$ und $\alpha = 30^0\,9'\,37''$.

Aufgaben. 1) Bestimme die Werte von: a) log sin $18{,}35^0$; b) log cos $58{,}76^0$; c) log tg $74{,}83^0$; d) log cotg $46{,}38^0$; e) log sin $3{,}216^0$; f) log tg $1{,}527^0$.

2) Wie groß ist $\sphericalangle\, \alpha$, wenn
a) log sin $\alpha = 9{,}2654 - 10$; b) log cos $\alpha = 9{,}4872 - 10$; c) log tg $\alpha = 0{,}1943$;
d) log cotg $\alpha = 9{,}8743 - 10$; e) log sin $\alpha = 8{,}4550 - 10$; f) log tg $\alpha = 8{,}7883 - 10$.

10. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks. Mit der Einführung der trigonometrischen Funktionen ist uns zugleich unmittelbar die Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks ermöglicht, wie der Leser ohne besondere Zusätze aus dem folgenden erkennt. Das rechtwinklige Dreieck sei ABC (Fig. 9) mit dem rechten Winkel bei A.

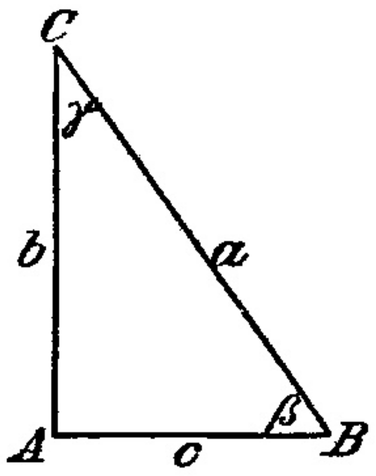


Fig. 9

1) Gegeben: Die beiden Katheten b und c.

$$\text{Es ist } \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}; \quad \sphericalangle\,\gamma = 90^0 - \beta$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a}, \quad \text{daher } a = \frac{b}{\sin\beta};$$

oder wir berechnen a mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2},$$

eine Formel, die freilich für logarithmische Rechnung nicht bequem ist und die vorteilhaft nur dann angewendet wird, wenn b und c höchstens zweistellige Zahlen sind.

2) Gegeben: Die Hypotenuse a und eine Kathete b.

$$\sin\beta = \frac{b}{a}; \quad \sphericalangle\,\gamma = 90^0 - \beta$$

$$\cos\beta = \frac{c}{a}, \quad \text{daher } c = a\cos\beta \text{ oder nach dem pythagoreischen Lehrsatze:}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

Die Auflösung ist die gleiche, wenn a und c gegeben sind.

3) Gegeben a und β.

$$\sphericalangle\,\gamma = 90^0 - \beta; \quad \sin\beta = \frac{b}{a}, \quad \text{daher } b = a\sin\beta.$$

$$\cos\beta = \frac{c}{a}, \quad \text{daher } c = a\cos\beta.$$

Die Auflösung ist die gleiche, wenn a und γ gegeben sind.

4) Gegeben b und β.

$$\sphericalangle\,\gamma = 90^0 - \beta; \quad \sin\beta = \frac{b}{a}, \quad \text{daher } a = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}, \quad \text{daher } c = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta} = b\operatorname{cotg}\beta.$$

In gleicher Weise ist die Berechnung vorzunehmen, wenn b und γ, c und γ oder c und β gegeben sind.

In allen Fällen ist der Inhalt zu berechnen aus $I = \frac{bc}{2}$.

11. Beispiele. 1) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse $a = 87{,}43$ m, eine Kathete $b = 56{,}23$ m. Wie groß ist die andere Kathete und wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

$\sin \beta = \frac{b}{a}$ (Fig. 9) $\log b = \log 56{,}23 = 1{,}7499$

$-\log a = \log 87{,}43 = 1{,}9417$

$\log \sin \beta = 9{,}8082 - 10$; $\beta = 40{,}01^0$

$\measuredangle \gamma = 90^0 - \beta = 90^0 - 40{,}01^0$ $\gamma = 49{,}99^0$

$c = a \cos \beta$; $\log a = 1{,}9417$

$+\log \cos \beta = \log \cos 40{,}01^0 = 9{,}8842 - 10$

$\log c = 1{,}8259$; $c = 66{,}97$ m

oder $c = \sqrt{(a+b)(a-b)} = \sqrt{(87{,}43 + 56{,}23)(87{,}43 - 56{,}23)} = \sqrt{143{,}66 \cdot 31{,}2}$

$\log 143{,}66 = 2{,}1573$

$+\log 31{,}2 = 1{,}4942$

$\overline{3{,}6515}$

$\log c = 1{,}8258$; $c = 66{,}96$ m. [2)]

Die beiden Arten der Berechnung ergeben gegeneinander einen Unterschied von einer Einheit in der letzten Dezimalstelle.

2) In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete $b = 37{,}7$ m und der gegenüberliegende Winkel $\beta = 48{,}29^0$. Wie groß sind die beiden anderen Katheten und wie groß ist der Inhalt des Dreiecks?

$a = \frac{b}{\sin \beta}$ $\log b = \log 37{,}7 = 1{,}5763$

$-\log \sin \beta = \log \sin 48{,}29^0 = 9{,}8730 - 10$

$\log a = 1{,}7033$; $a = 50{,}50$ m.

$c = b \operatorname{cotg} \beta$. $\log b = 1{,}5763$

$+\log \operatorname{cotg} \beta = \log \operatorname{cotg} 48{,}29^0 = 9{,}9501 - 10$

$\log c = 1{,}5264$; $c = 33{,}61$ m.

$I = \frac{1}{2} bc$ $\log b = 1{,}5763$

$+\log c = 1{,}5264$

$3{,}1027$

$-\log 2 = 0{,}3010$

$\log I = 2{,}8017$; $I = 633{,}4$ qm.

3) Um die Höhe AC (vgl. Fig. 9) eines Turmes zu bestimmen, hat man von einem Punkte B aus, der in derselben Horizontalen mit dem Fußpunkte des Turmes liegt und von ihm 32,4 m entfernt ist, den Höhenwinkel β der Turmspitze (den Winkel, den die Verbindungslinie mit der Horizontalen einschließt) gemessen und zu $54{,}25^0$ bestimmt. Wie hoch ist der Turm?

Es ist $\operatorname{tg} \beta = \frac{AC}{AB}$, also $AC = AB \operatorname{tg} \beta$.

$\log AB = \log 32{,}4 = 1{,}5105$

$+\log \operatorname{tg} \beta = \log \operatorname{tg} 54{,}25^0 = 0{,}1427$

$\log h = 1{,}6532$; $h = 45$ m.

Die Höhe des Turmes beträgt 45 m.

4) Wie groß sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Inhalt 562,8 qm beträgt und dessen einer Winkel $\beta = 62{,}54^0$ ist?

Gegeben ist uns der Inhalt $I = \frac{1}{2} bc$; zwischen b und c finden wir eine Beziehung durch $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}$, also $b = c \operatorname{tg} \beta$ Setzen wir diesen Wert in die Formel für I ein, so finden wir:

$I = \frac{1}{2} c^2 \operatorname{tg} \beta$, somit $c = \sqrt{\frac{2I}{\operatorname{tg} \beta}}$ oder

$$c = \sqrt{2I \operatorname{cotg} \beta}.$$

Die zweite Kathete b bestimmen wir aus $I = \frac{1}{2} bc$ durch Auflösen für b

$$b = \frac{2I}{c}$$ und die Hypotenuse $a = \frac{b}{\sin \beta}$

$$c = \sqrt{2\,I \cot g\,\beta}.$$

$\log 2 = 0{,}3010$
$+\log I = \log 562{,}8 = 2{,}7503$
$+\log \cot g\,\beta = \log \cot g\, 62{,}54^0 = 9{,}7157 - 10$
$2{,}7670$
$\log c = 1{,}3835;$ $c = 24{,}18$ m.

$$b = \frac{2\,I}{c}$$

$\log 2 = 0{,}3010$
$+\log 1 = 2{,}7503$
$3{,}0513$
$-\log c = 1{,}3835$
$\log b = 1{,}6678;$ $b = 46{,}53$ m.

$$a = \frac{b}{\sin \beta}$$

$\log b = 1{,}6678$
$-\log \sin \beta = \log \sin 62{,}54^0 = 9{,}9481 - 10$
$\log a = 1{,}7197;$ $a = 52{,}44$ m.

Aufgaben: 3) In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei A ist
a) $b = 38{,}54$ m; $c = 17{,}83$ m; b) $a = 267{,}4$ m; $c = 123{,}8$ m;
c) $a = 72{,}85$ m; $\gamma = 56{,}09^0$; d) $c = 26{,}57$ m; $\gamma = 27{,}16^0$.
Wie groß sind die übrigen Seiten und Winkel und der Inhalt des Dreiecks?

12. Das gleichschenklige Dreieck. Durch die Höhe von der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks zerfällt das Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, daher bietet uns auch die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks nichts Neues.

1) Gegeben seien die Seiten des gleichschenkligen Dreiecks. Im rechtwinkligen Dreiecke ADC (Fig. 10) ist die Grundlinie $AD = \frac{1}{2}c$ und der Winkel an der Spitze, $\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\gamma$,

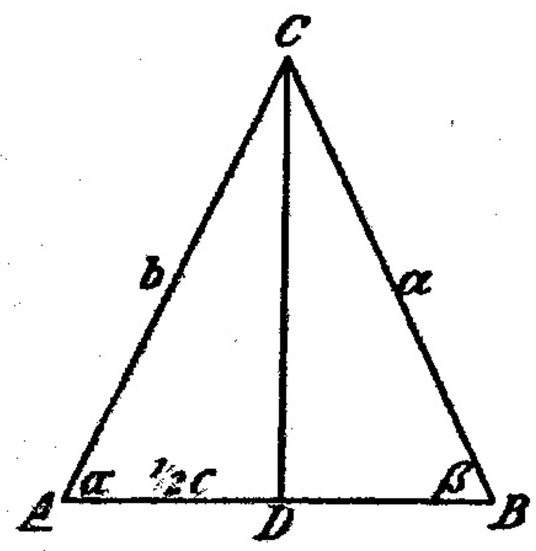


Fig. 10

daher ist $\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}c}{b} = \frac{c}{2b}$; $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{c}{2b}$ oder $\gamma = 2(R - \alpha)$

2) Gegeben seien der Schenkel a und der Winkel an der Spitze γ.

$$\alpha = R - \tfrac{1}{2}\gamma; \quad \sin \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\frac{1}{2}c}{b}, \text{ daher } c = 2b \sin \tfrac{1}{2}\gamma$$

Ebenso sind die übrigen Fälle leicht zu behandeln.

Beispiel: In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Grundlinie $c = 35{,}47$ m, jeder Winkel an ihr $\alpha = \beta = 69{,}64^0$. Wie groß ist der Schenkel und wie groß der Inhalt des Dreiecks?

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}c}{b}; \quad b = \frac{c}{2 \cos \alpha}.$$

Die Höhe h bestimmen wir aus $tg\,\alpha = \frac{h}{\frac{1}{2}c}$; $h = \frac{1}{2}c\,tg\,\alpha$

und daraus $I = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}c\,tg\,\alpha$

$I = \frac{1}{4}c^2 tg\,\alpha.$

$b = \frac{c}{2 \cos \alpha}$. $\log c = \log 35{,}47 = 1{,}5498$

$-\begin{cases}\log 2 = 0{,}3010 \\ \log \cos \alpha = \log \cos 69{,}64^0 = 9{,}5415 - 10\end{cases}$
$\log b = 1{,}7073;$ $b = 50{,}97$ m.

$I = \frac{1}{4}c^2 tg\,\alpha.$ $\log c = 1{,}5498$ ·2
$+\log tg\,\alpha = \log tg\, 69{,}64^0 = 0{,}4305$
$3{,}5301$
$-\log 4 = 0{,}6021$
$\log I = 2{,}9280;$ $I = 847{,}2$ qm.

Aufgaben: 4) In einem gleichschenkligen Dreieck ist
a) $c = 46{,}73$ cm; $\gamma = 74{,}26^0$
b) $a = 98{,}34$ cm; $c = 62{,}72$ cm
c) $a = 52{,}47$ cm; $\alpha = 70{,}58^0$.
Wie groß sind die übrigen Stücke des Dreiecks?

Antworten.

1) a) 9,4981 — 10; b) 9,7149 — 10; c) 0,5668;
d) 9,9791 — 10; e) 8,7490 — 10; f) 8,4258 — 10.
2) a) $10{,}62^0$; b) $72{,}12^0$; c) $57{,}41^0$; d) $53{,}18^0$; e) $1{,}634^0$; f) $3{,}515^0$.
3) a) $\beta = 65{,}17^0$; $\gamma = 24{,}83^0$; $a = 42{,}46$ m; $I = 343{,}6$ qm.
b) $\gamma = 27{,}58^0$; $\beta = 62{,}42^0$; $b = 237{,}0$ m; $I = 14670$ qm.
c) $c = 60{,}46$ m; $b = 40{,}64$ m; $\beta = 33{,}91^0$; $I = 1229$ qm.
d) $\beta = 62{,}84^0$; $a = 58{,}21$ m; $b = 51{,}80$ m; $I = 688{,}2$ qm.
4) a) $\alpha = 52{,}87^0$; $b = 38{,}71$ cm; $I = 435{,}2$ qcm.
b) $\gamma = 37{,}20^0$; $\alpha = 71{,}40^0$; $I = 2922$ qcm.
c) $\gamma = 38{,}84^0$; $c = 34{,}88$ cm; $I = 862{,}8$ qcm.

Zweites Kapitel

Die trigonometrischen Funktionen bei stumpfen Winkeln. Die vier Hauptfälle beim schiefwinkligen Dreieck

1. Wollen wir schiefwinklige Dreiecke berechnen, in denen auch stumpfe Winkel vorkommen können, so müssen wir den Begriff der trigonometrischen Funktionen so erweitern, daß sie auch für stumpfe Winkel gelten.

Für $AB = 1$ (Fig. 11) und $\sphericalangle \alpha \leqq R$ ist das Lot BC die Sinuslinie des Winkels α; ist $\sphericalangle \alpha_1 > R$, so soll auch dann das Lot B_1C_1 die Sinuslinie des Winkels α_1 genannt werden und uns die Länge von B_1C_1 den Sinus des Winkels α_1 angeben. Für den spitzen Winkel α ist die Projektion AC die Kosinuslinie, unter Beibehaltung derselben Erklärung ist für den stumpfen Winkel α_1 die Kosinuslinie AC_1. Da diese Strecke aber der Strecke AC entgegengesetzt gerichtet ist, haben wir ihre Länge als negativ anzusehen. Wir können auch sagen, der Kosinus eines Winkels fällt von 1 bis 0, während der Winkel von 0^0 bis 90^0 steigt. Wächst der Winkel weiter, so nimmt der Kosinus noch mehr ab, er wird jetzt kleiner als Null, also negativ.

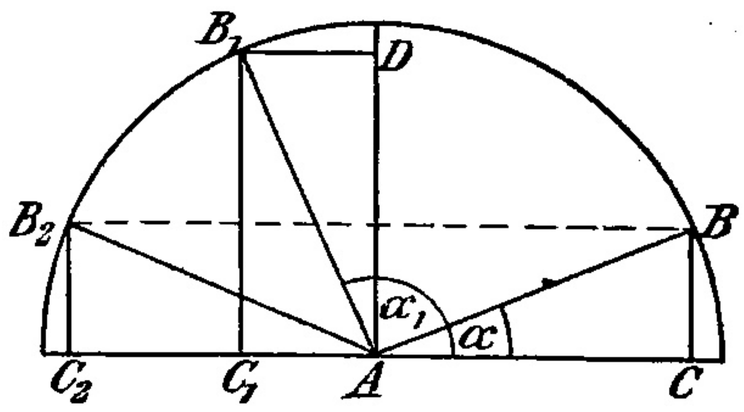


Fig. 11

Ist $\sphericalangle BAB_1 = R$, so ist $\triangle ADB_1 \cong ACB$, also

$$\sin(90^0 + \alpha) = B_1C_1 = AC = \cos\alpha$$
$$\text{und } \cos(90^0 + \alpha) = AC_1 = -BC = -\sin\alpha$$

Ziehen wir durch B die Parallele zu CA, die den Kreis in B_2 schneidet, so ist $\sphericalangle BAC = B_2AC_2$, die Winkel BAC und B_2AC sind daher Supplementwinkel. Ihre Sinuslinien CB und C_2B_2 sind einander gleich, ihre Kosinuslinien AC und AC_2 indessen haben zwar auch gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung, somit ist

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha;\ \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$

Zu demselben Sinus gehören also 2 Winkel, ein spitzer und ein stumpfer, der Supplementwinkel des ersteren.

Die Division der beiden letzten Gleichungen durcheinander ergibt:

$$\frac{\sin(180^0 - \alpha)}{\cos(180^0 - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}$$
$$\operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
und ebenso $$\operatorname{cotg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

Dieselben trigonometrischen Funktionen bei Supplementwinkeln haben gleiche absolute Größe, die Sinus haben auch gleiche Vorzeichen, die Kosinus, Tangens und Kotangens aber verschiedene.

Daraus ergibt sich zugleich, daß für stumpfe Winkel nicht besondere Tafeln nötig sind. Am einfachsten ist es, den Winkel um 90^0 zu vermindern und von dem verminderten Winkel die Kofunktion aufzuschlagen, denn es ist: $\sin\alpha = \cos(\alpha - 90^0)$; $\cos\alpha = -\sin(\alpha - 90^0)$ und daher auch $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{cotg}(\alpha - 90^0)$, $\operatorname{cotg}\alpha = -\operatorname{tg}(\alpha - 90^0)$.

Die früher abgeleiteten Formeln für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$ behalten auch nach der Erweiterung der Definition ihre Gültigkeit, wie man leicht bei geringer Abänderung der damals benutzten Figuren zeigen kann, und damit auch alle Formeln, die wir aus ihnen abgeleitet haben.

2. Sinussatz. Zerlegen wir $\triangle$ ABC (Fig. 12a) durch die Höhe CD in zwei rechtwinklige Dreiecke, so ist

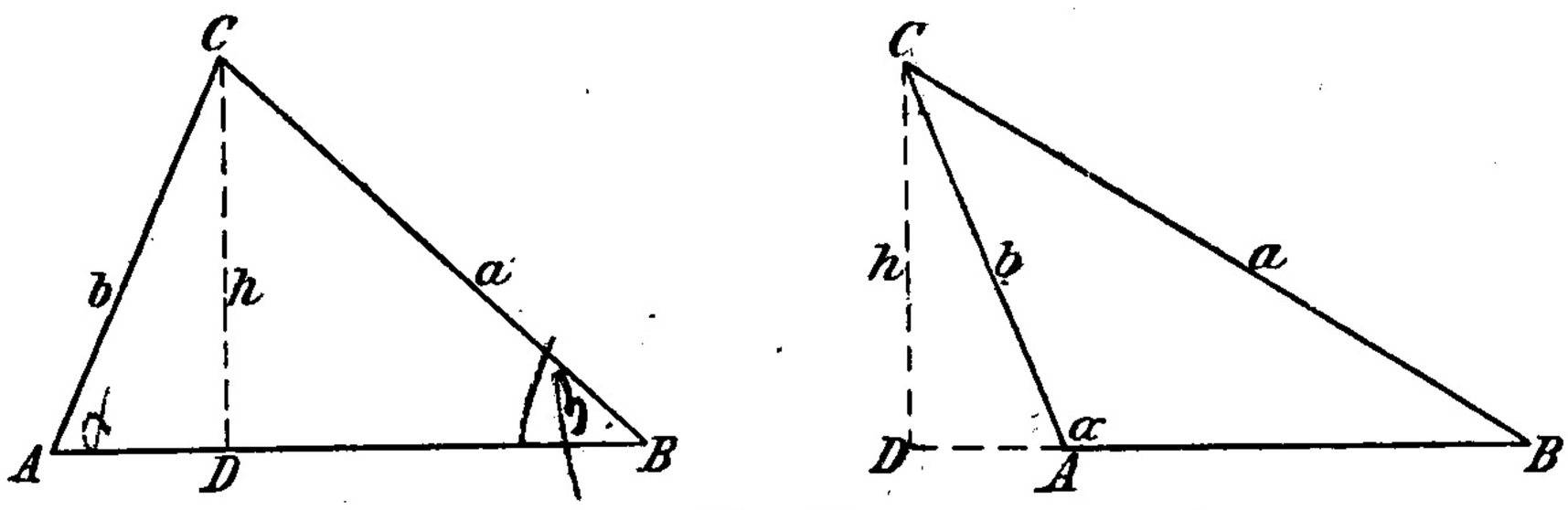
$$\text{aus } \triangle \text{DBC}: \quad \sin\beta = \frac{h}{a}; \quad h = a\sin\beta$$

$$\text{aus } \triangle \text{ADC}: \quad \sin\alpha = \frac{h}{b}; \quad h = b\sin\alpha$$

$$\text{mithin ist } a\sin\beta = b\sin\alpha,$$

eine Produktengleichung, die als Proportion in der Form geschrieben werden kann:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$



a Fig. 12 b

Ist einer der Winkel α und β, etwa $\alpha > R$ (Fig. 12b), so ist

$$\text{aus } \triangle \text{DAC}: \quad h = b\sin(180^0 - \alpha) = b\sin\alpha,$$

so daß an der abgeleiteten Gleichung nichts geändert wird.

Dehnen wir die Proportion auf die drei Seiten aus, so lautet sie:

$$\textbf{I.} \quad a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

In einem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

3. Kosinussatz. In der Planimetrie Kap. 7, 19. 20. haben wir den Satz abgeleitet: Das Quadrat einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert oder vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie, je nachdem die Seite einem spitzen oder einem stumpfen Winkel gegenüberliegt.

Bezeichnen wir die Projektion mit x, so ist (Fig. 12a)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

Da aus $\triangle$ ADC ist: $x = b\cos\alpha$, so ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Ist $\sphericalangle\alpha$ ein stumpfer (Fig. 12b), so ist $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$.

Es ist jetzt: $x = b\cos\text{CAD} = b\cos(180^0 - \alpha) = -b\cos\alpha$,

so daß durch Einsetzen des Wertes von x die Formel wieder übergeht in

$$\textbf{II.} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Wir erhalten also aus den beiden Sätzen der Geometrie nur eine Formel, weil der Kosinus eines stumpfen Winkels negativ ist.

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir aus II

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Das Quadrat einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Produkt dieser Seiten und des Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

4. Tangentensatz. Aus der Formel I: $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

ergibt sich $(a + b) : (a - b) = (\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta)$

Nun ist nach den Formeln Xa und Xb (Kap. I, 7)

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} : \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

so daß

$$\textbf{III.}\quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

In einem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz wie der Tangens der halben Summe der Gegenwinkel zum Tangens ihrer halben Differenz.

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir die übrigen Fälle.

Diese Formel ist bequem für die Anwendung, wenn uns in einem Dreieck zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben sind und die beiden anderen Winkel bestimmt werden sollen.

Aus γ finden wir $\frac{\alpha+\beta}{2} = R - \frac{\gamma}{2}$, berechnen dann mit Hilfe des Tangentensatzes $\frac{\alpha-\beta}{2}$ und erhalten durch Addition bez. Subtraktion von $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ die Winkel α und β.

5. Die vier Grundaufgaben der Dreiecksberechnung. In jeder der Formeln I bis III sind 4 Größen enthalten. Sind uns drei von diesen gegeben, so erhalten wir die vierte durch Auflösen der Gleichung. Wenn wir von einem Dreiecke 3 unmittelbare Stücke kennen, so suchen wir uns diejenige unter den Gleichungen heraus, die diese drei Stücke enthält, finden daraus ein viertes Stück und danach auch die übrigen. Den Sinussatz z. B. wenden wir an, wenn unter den 3 Stücken eine Seite und ihr Gegenwinkel ist; wir erhalten dann das dem dritten Stücke gegenüberliegende.

1. Gegeben: die drei Seiten a, b und c. (Dem ersten Kongruenzsatz entsprechend.)

Die einzige Formel, in der drei Seiten vorkommen, ist der Kosinussatz, den wir daher hier anwenden müssen und aus dem wir einen Winkel finden.

Aus $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

ergibt sich $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Mit Hilfe dieser Formel berechnen wir uns den größten Winkel, d. h. den, welcher der größten Seite gegenüberliegt, da, wie wir gesehen haben, kleine Winkel durch den Kosinus nur ungenau bestimmt werden. Die Ausrechnung ist jedoch nur dann bequem, wenn die Seiten höchstens zweistellige Zahlen sind, so daß wir zur Berechnung des Zählers der rechten Seite keine Logarithmen brauchen. Für mehrstellige Zahlen benutzen wir die folgende Ableitung:

Die Formel IXa in Kap. I, 6 lautet: $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Setzen wir hierin den oben erhaltenen Wert von $\cos\alpha$ ein, so ergibt sich

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2} + \frac{b^2+c^2-a^2}{4bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}.$$

Wie in der Planimetrie (S. 57) setzen wir $a + b + c = 2s$, also $b + c - a = 2(s - a)$ und erhalten

$$\textbf{IV.}\quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Aus $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ und $\sin^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ (Formel VIIIa in Kap. I, 6) findet man in ähnlicher Weise:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2} - \frac{b^2+c^2-a^2}{4bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}$$
$$= \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$
$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} = \frac{(s-c)(s-b)}{bc}$$

$$\textbf{V.}\quad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Dividieren wir Gl. V durch IV, so erhalten wir

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} : \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\textbf{VI.}\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Die entsprechenden Formeln für die anderen Winkel erhalten wir durch zyklische Vertauschung.

Da bei kleinen Winkeln der Sinus, bei großen der Kosinus sich schnell ändert, so werden wir den kleinsten Winkel des Dreiecks durch $\sin\frac{1}{2}\alpha$, den größten durch $\cos\frac{1}{2}\alpha$ bestimmen. In allen Fällen liefert aber $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ ein genügend genaues Resultat.

Haben wir $\sphericalangle\alpha$ durch eine dieser Formeln berechnet, so werden wir den zweiten Winkel durch den Sinussatz bestimmen.

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}.$$

Beispiel: $a = 58{,}94$ m; $b = 93{,}25$ m; $c = 67{,}27$ m.

Wir bestimmen α durch $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$.

Die Summe der Dreiecksseiten ist $2s = 219{,}46$, also $s = 109{,}73$; $s-b = 16{,}48$; $s-c = 42{,}46$.

$$\begin{aligned}
\log(s-b) &= \log 16{,}48 &&= 1{,}2170\\
+\log(s-c) &= \log 42{,}46 &&= 1{,}6280\\
&&&\overline{\quad 2{,}8450}\\
-\begin{cases}\log b\\ \log c\end{cases} &= \begin{cases}\log 93{,}25\\ \log 67{,}27\end{cases} &&= \begin{cases}1{,}9697\\ 1{,}8278\end{cases}\\
&&&\overline{\quad 9{,}0475-10}\\
\log\sin\tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}5238-10; && \tfrac{1}{2}\alpha = 19{,}51^0.\\
&&&\overline{\quad \alpha = 39{,}02^0.}
\end{aligned}$$

$\sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a}$.

$$\begin{aligned}
\log c &&&= 1{,}8278\\
+\log\sin\alpha &= \log\sin 39{,}02^0 &&= 9{,}7991-10\\
&&&\overline{\quad 1{,}6269}\\
-\log a &= \log 58{,}94 &&= 1{,}7704\\
&&&\overline{\quad \log\sin\gamma = 9{,}8565-10}\qquad \gamma = 45{,}94^0.\\
&&&\overline{\quad \beta = 95{,}04^0.}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Dem berechneten $\log\sin\frac{1}{2}\alpha$ entspricht noch ein zweiter Winkel, der Supplementwinkel von $19{,}51^0$; dieser Wert kann aber keine Lösung sein, da dann $\sphericalangle\alpha > 2R$. Ebenso erhalten wir aus der Rechnung noch einen zweiten Winkel γ, das Supplement zu $45{,}94^0$; auch dieser Wert kann keine Lösung sein, da sonst $\sphericalangle\gamma > \beta$, was nicht möglich ist, da $b > c$.

2. Gegeben: 2 Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ. (Dem zweiten Kongruenzsatz entsprechend.) Sind uns zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, so können wir

den Kosinussatz oder den Tangentensatz anwenden; durch den ersteren finden wir die dritte Seite, durch den letzteren die beiden anderen Winkel. Den Kosinussatz haben wir zu nehmen in der Form

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Diese Formel ist für die logarithmische Berechnung wenig bequem, und so nehmen wir sie nur, wenn es sich allein um die Bestimmung der dritten Seite handelt.

Der Tangentensatz ergibt: $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Zur Berechnung der dritten Seite können wir jetzt den Sinussatz anwenden und finden aus

$$c : b = \sin\gamma : \sin\beta \quad c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Beispiel: $a = 738{,}5$ m; $b = 354{,}7$ m; $\gamma = 76{,}42^0$.

$$\begin{aligned}
\log(a-b) &= \log 383{,}8 &&= 2{,}5841\\
-\log(a+b) &= \log 1093{,}2 &&= 3{,}0387\\
&&& 9{,}5454 - 10
\end{aligned}$$

$$+\log\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \log\operatorname{tg} 51{,}79^0 = 0{,}1039$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}6493 - 10;$$

$\gamma = 76{,}42^0$
$\alpha+\beta = 103{,}58^0$
$\frac{\alpha+\beta}{2} = 51{,}79^0$
$\frac{\alpha-\beta}{2} = 24{,}04^0$
$\alpha = 75{,}83^0$
$\beta = 27{,}75^0$

$$\begin{aligned}
\log b &= \log 354{,}7 &&= 2{,}5498\\
+\log\sin\gamma &= \log\sin 76{,}42^0 &&= 9{,}9876 - 10\\
&&& 2{,}5374\\
-\log\sin\beta &= \log\sin 27{,}75^0 &&= 9{,}6680 - 10\\
&&\log c &= 2{,}8694; \qquad c = 740{,}3 \text{ m.}
\end{aligned}$$

3. Gegeben: eine Seite c und zwei Winkel α und β. (Dem dritten Kongruenzsatz entsprechend.)

$$\sphericalangle\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta)$$

Uns sind nun zwei gegenüberliegende Stücke, c und γ, bekannt und wir können daher den Sinussatz anwenden.

$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma; \quad a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma; \quad b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Beispiel: $c = 98{,}43$ m; $\alpha = 46{,}39^0$; $\beta = 57{,}85^0$.

$\alpha = 46{,}39^0$
$\beta = 57{,}85^0$
$\gamma = 75{,}76^0$

$$\begin{aligned}
\log c &= \log 98{,}43 &&= 1{,}9931\\
+\log\sin\alpha &= \log\sin 46{,}39^0 &&= 9{,}8597 - 10\\
&&& 1{,}8528\\
-\log\sin\gamma &= \log\sin 75{,}76^0 &&= 9{,}9864 - 10\\
&&\log a &= 1{,}8664; \qquad a = 73{,}52 \text{ m.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log c &&&= 1{,}9931\\
+\log\sin\beta &= \log\sin 57{,}85^0 &&= 9{,}9277 - 10\\
&&& 1{,}9208\\
-\log\sin\gamma &= &&9{,}9864 - 10\\
&&\log b &= 1{,}9344; \qquad b = 85{,}98 \text{ m.}
\end{aligned}$$

4. Gegeben: 2 Seiten a und b und der der größeren Seite a gegenüberliegende Winkel α. (Dem 4. Kongruenzsatze entsprechend.)

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}.$$

Für den Wert von $\sin\beta$ erhalten wir 2 Winkel, einen spitzen und einen stumpfen; da aber $\measuredangle\beta < \alpha$, kann β nur ein spitzer Winkel sein, so daß er eindeutig bestimmt ist.

$$\measuredangle\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta);\quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Beispiel: $a = 285{,}5$ m; $b = 234{,}9$ m; $\alpha = 81{,}21^0$

$$\begin{aligned}
\log b &= \log 234{,}9 &&= 2{,}3709\\
+\log\sin\alpha &= \log\sin 81{,}21^0 &&= 9{,}9949-10\\
&&&\overline{2{,}3658}\\
-\log a &= \log 285{,}5 &&= 2{,}4556\\
&&&\overline{9{,}9102-10};
\end{aligned}$$

$\alpha = 81{,}21^0$,
$\beta = 54{,}42^0$
$\gamma = 44{,}37^0$

$$\begin{aligned}
\log a &&&= 2{,}4556\\
+\log\sin\gamma &= \log\sin 44{,}37^0 &&= 9{,}8447-10\\
&&&\overline{2{,}3003}\\
-\log\sin\alpha &&&= 9{,}9949-10\\
&&&\overline{2{,}3054};
\end{aligned}$$

$c = 202{,}0$ m.

5. Gegeben: 2 Seiten a und b und der der kleineren Seite b gegenüberliegende Winkel β.

Die Berechnung ist die gleiche wie in voriger Nummer, also $\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b}$. Da jetzt $a > b$, ist $\sin\alpha > \sin\beta$, und somit sind die beiden Werte von α, die dem Werte $\sin\alpha$ entsprechen, $> \beta$. Beide Werte sind daher Lösungen der Aufgabe.

$$\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta);\quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Beispiel: $a = 57{,}24$ m; $b = 39{,}61$ m; $\beta = 42{,}65^0$

$$\begin{aligned}
\log a &= \log 57{,}24 &&= 1{,}7577\\
+\log\sin\beta &= \log\sin 42{,}65^0 &&= 9{,}8309-10\\
&&&\overline{1{,}5886}\\
-\log b &= \log 39{,}61 &&= 1{,}5978\\
&&&\overline{9{,}9908-10};
\end{aligned}$$

$\alpha = 78{,}25^0$
$\alpha_1 = 101{,}75^0$

oder als zweiter Wert $\alpha_1 = 180^0 - 78{,}25^0$;

a) erste Lösung:

$\alpha = 78{,}25^0$
$\beta = 42{,}65^0$
$\gamma = 59{,}10^0$

$$\begin{aligned}
\log a &&&= 1{,}7577\\
+\log\sin\gamma &= \log\sin 59{,}10^0 &&= 9{,}9335-10\\
&&&\overline{1{,}6912}\\
-\log\sin\alpha &&&= 9{,}9908-10\\
&&&\overline{1{,}7004};
\end{aligned}$$

$c = 50{,}17$ m.

b) zweite Lösung:

$\alpha_1 = 101{,}75^0$
$\beta = 42{,}65^0$
$\gamma_1 = 35{,}60^0$

$$\begin{aligned}
\log a &&&= 1{,}7577\\
+\log\sin\gamma_1 &= \log\sin 35{,}60^0 &&= 9{,}7650-10\\
&&&\overline{1{,}5227}\\
-\log\sin\alpha &&&= 1{,}9908-10\\
&&&\overline{1{,}5319};
\end{aligned}$$

$c_1 = 34{,}03$ m.

6. Berechnung des Dreiecksinhaltes. Aus der Planimetrie S. 51, 56 u. 73 sind uns bereits bekannt die Formeln $I = \frac{1}{2} c h$, die heronische Formel $I = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ und $I = \varrho s$. Eine weitere Formel erhalten wir, wenn wir in $I = \frac{1}{2} c h$ für h den Wert $b \sin \alpha$ (aus $\triangle$ ADC in Fig. 12) einsetzen.

$$I = \tfrac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt zweier Seiten multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

7. Berechnung von r und ϱ. Es sei (Fig. 13) M der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises, $MD \perp AB$, so ist $AM = BM$, $\sphericalangle AMB = 2\gamma$ nach dem Satze vom Kreiswinkel, daher $\sphericalangle AMD = \gamma$, $AD = \frac{1}{2} c$ und aus $\triangle$ ADM:

$$\sin \gamma = \frac{\frac{1}{2} c}{r}; \quad r = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

womit wir zugleich einen zweiten Beweis für die Richtigkeit des Sinussatzes haben. Aus der Planimetrie S. 73 ist uns die Formel

$$r = \frac{abc}{4I}$$

bekannt. Ebenso hatten wir dort (S. 73) gefunden: $\varrho = \frac{I}{s}$.

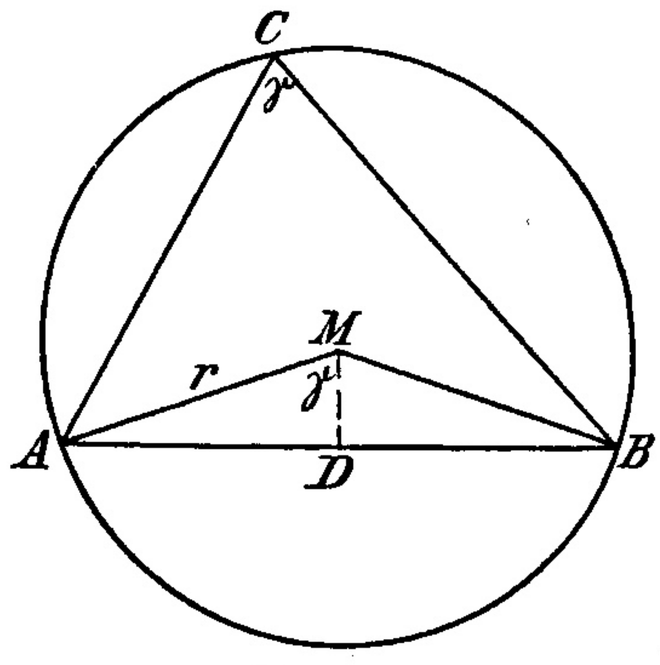


Fig. 13

Die Formel VI dieses Kapitels

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$ läßt sich umändern in

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{1}{s(s-a)} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{I}{s(s-a)}, \text{ und da } \frac{I}{s} = \varrho,$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\varrho}{s-a}$$

daher $$\varrho = (s-a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Beispiel. In einem Dreieck seien gegeben die Seite $c = 69{,}85$ m und die Winkel $\alpha = 62{,}22^0$ und $\beta = 50{,}41^0$. Wie groß sind der Inhalt des Dreiecks, der Halbmesser des umbeschriebenen und der des einbeschriebenen Kreises?

$r = \frac{c}{2 \sin \gamma}$. Es ist jedoch nicht nötig, erst γ zu berechnen, sondern wir können statt dessen $\alpha + \beta$ nehmen, da die Sinus bei Supplementwinkeln gleich sind, also $r = \frac{c}{2 \sin (\alpha + \beta)}$.

Die beiden anderen Seiten des Dreiecks, a und b, die wir zur Bestimmung von s nötig haben, berechnen wir einfacher mit Hilfe von r und nicht durch den Sinussatz.

$$a = 2r \sin \alpha; \quad b = 2r \sin \beta.$$

Sodann ist: $I = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$; $\varrho = \frac{I}{s}$

$$\begin{array}{lll} \log c & = \log 69{,}85 & = 1{,}8442 \\ - \log 2 & & = 0{,}3010 \\ - \log \sin (\alpha + \beta) & = \log \cos 22{,}63^0 & = 9{,}9652 - 10 \\ & \log r = 1{,}5780; & r = 37{,}85 \text{ m.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \log 2 & & = 0{,}3010 \\ + \log r & & = 1{,}5780 \\ + \log \sin \alpha & = \log \sin 62{,}22^0 & = 9{,}9468 - 10 \\ & \log a = 1{,}8258; & a = 66{,}96 \text{ m.} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\log 2 && = 0{,}3010\\
+&\log r && = 1{,}5780\\
+&\log \sin\beta = \log \sin\ 50{,}41^0 && = 9{,}8869 - 10\\
&&\log b &= 1{,}7659
\end{aligned}$$

$a = 66{,}96$ m
$b = 58{,}33$ „
$c = 69{,}85$ „
$2s = 195{,}14$ m; $s = 97{,}57$ m.

$$\begin{aligned}
&\log 0{,}5 && = 9{,}6990 - 10\\
+&\log b && = 1{,}7659\\
+&\log c && = 1{,}8442\\
+&\log \sin\alpha && = 9{,}9468 - 10\\
&&\log I &= 3{,}2559;
\end{aligned}$$

$I = 1802{,}5$ qm.

$$\begin{aligned}
&\log I && = 3{,}2559\\
-&\log s = \log 97{,}57 && = 1{,}9893\\
&&\log \varrho &= 1{,}2666;
\end{aligned}$$

$\varrho = 18{,}48$ m.

Aufgaben. Im Dreieck ABC sei

1) $b = 93{,}60$ m; $c = 125{,}4$ m; $\alpha = 68{,}28^0$.
2) $a = 48{,}63$ m; $\alpha = 73{,}64^0$; $\beta = 49{,}55^0$.
3) $a = 817{,}2$ m; $b = 583{,}7$ m; $c = 452{,}5$ m.
4) $a = 37{,}4$ m; $c = 62{,}5$ m; $\gamma = 84{,}75^0$.
5) $b = 43{,}93$ m; $c = 52{,}08$ m; $\beta = 48{,}73^0$.

Wie groß sind die übrigen Seiten und Winkel der Dreiecke und wie groß der Inhalt, der Radius des umbeschriebenen und der des einbeschriebenen Kreises?

Antworten

1) $\gamma = 67{,}95^0$; $\beta = 43{,}77^0$; $a = 125{,}7$ m; $I = 5452{,}5$ qm; $r = 67{,}66$ m; $\varrho = 31{,}64$ m.
2) $b = 38{,}56$ m; $c = 42{,}41$ m; $\gamma = 56{,}81^0$; $I = 784{,}8$ qm; $r = 25{,}34$ m; $\varrho = 12{,}11$ m.
3) $\alpha = 103{,}38^0$; $\gamma = 32{,}59^0$; $\beta = 44{,}03^0$; $I = 128500$ qm; $r = 420{,}1$ m; $\varrho = 138{,}6$ m.
4) $\alpha = 36{,}58^0$; $\beta = 58{,}67^0$; $b = 53{,}61$ m; $I = 998{,}6$ qm; $r = 31{,}39$ m; $\varrho = 13{,}01$ m.
5) $\gamma = 62{,}975^0$; $\alpha = 68{,}295^0$; $a = 54{,}31$ m; $I = 1063$ qm; $r = 29{,}23$ m; $\varrho = 14{,}14$ m.
oder $\gamma = 117{,}025^0$; $\alpha = 14{,}245^0$; $a = 14{,}38$ m; $I = 281{,}5$ qm; $r = 29{,}23$ m; $\varrho_1 = 5{,}10$ m.

Drittes Kapitel

Berechnung des Dreiecks aus mittelbaren Stücken

1. Sind uns zur Berechnung eines Dreiecks mittelbare Stücke gegeben, so suchen wir entweder ein Teildreieck, in dem uns drei unmittelbare Stücke bekannt sind und bestimmen uns daraus die übrigen nach dem vorigen Kapitel oder wir stellen Gleichungen zwischen den bekannten und unbekannten Stücken auf und lösen diese für die unbekannten Größen auf. Den ersten Weg nennt man den geometrischen, den zweiten den analytischen.

2. Im Dreieck ABC sei $c = 64{,}54$ m; $h_c = 50{,}46$ m; $t_c = 57{,}63$. Wie groß sind die übrigen Seiten des Dreiecks, die Winkel und der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises?

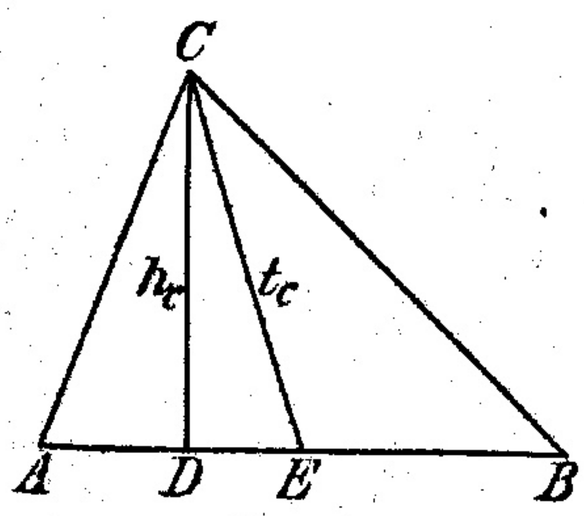


Fig. 14

Es sei CD (Fig. 14) die Höhe auf AB und CE die Mittellinie zur Seite AB des Dreiecks ABC, dann ist aus dem Dreieck DEC

$$DE = \sqrt{t_c^2 - h_c^2} = \sqrt{(t_c + h_c)(t_c - h_c)}$$

$$AD = AE - DE = \tfrac{1}{2}c - DE;\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{h_c}{AD};\quad b = \frac{h_c}{\sin\alpha}\ \text{(aus } \triangle ADC)$$

$$BD = BE + DE = \tfrac{1}{2}c + DE;\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{BD};\quad a = \frac{h_c}{\sin\beta}\ \text{(aus } \triangle BDC)$$

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta);\quad \varrho = (s - a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha$$

$\log (b_c + h_c) = \log 108{,}09 = 2{,}0338$
$+\log (b_c - h_c) = \log 7{,}17 = 0{,}8555$
$\log DE = 2{,}8893$ [2]
$\log DE = 1{,}4446;\ DE = 27{,}84$

$AD = 32{,}27 - 27{,}84 = 4{,}43;\ BD = 32{,}27 + 27{,}84 = 60{,}11.$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_c}{AD};\ \log h_c = \log 50{,}46 = 1{,}7029$
$-\log AD = \log 4{,}43 = 0{,}6464$
$\log \operatorname{tg}\alpha = 1{,}0565;\ \alpha = 84{,}983^0.$

$b = \frac{h_c}{\sin\alpha};\ \log h_c = 1{,}7029$
$-\log \sin\alpha = \log \sin 84{,}98^0 = 9{,}9983 - 10$
$\log b = 1{,}7046;\ b = 50{,}65\,\text{m}.$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{BD};\ \log h_c = 1{,}7029$
$-\log BD = \log 60{,}11 = 1{,}7790$
$\log \operatorname{tg}\beta = 9{,}9239 - 10;\ \beta = 40{,}01^0.$

$a = \frac{h_c}{\sin\beta};\ \log h_c = 1{,}7029$
$-\log \sin\beta = \log \sin 40{,}01^0 = 9{,}8082 - 10$
$\log a = 1{,}8947;\quad a = 78{,}47\,\text{m}.$

$\varrho = (s-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha;$
$\log (s-a) = \log 18{,}36 = 1{,}2639$
$+\log \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \log \operatorname{tg} 42{,}49^0 = 9{,}9619 - 10$
$\log \varrho = 1{,}2258;\quad \varrho = 16{,}82\,\text{m}.$

3. Ein Dreieck zu berechnen aus $c = 31{,}86\,\text{m};\ h_a = 23{,}75\,\text{m};\ h_b = 26{,}91\,\text{m}.$

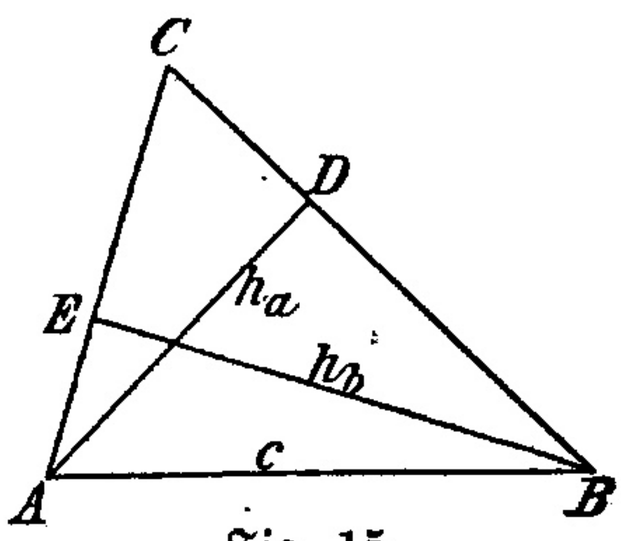


Fig. 15

Aus $\triangle ABE$ ist $\sin\alpha = \frac{h_b}{c}$; aus $\triangle CBE$: $a = \frac{h_b}{\sin\gamma}$;

aus $\triangle ABD$ ist $\sin\beta = \frac{h_a}{c}$; aus $\triangle ACD$: $b = \frac{h_a}{\sin\gamma}$;

$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$

$\sin\alpha = \frac{h_b}{c};\ \log h_b = \log 26{,}91 = 1{,}4300$
$-\log c = \log 31{,}86 = 1{,}5032$
$\log \sin\alpha = 9{,}9268 - 10;\quad \alpha = 57{,}66^0.$

$\sin\beta = \frac{h_a}{c};\ \log h_a = \log 23{,}75 = 1{,}3757$
$-\log c = 1{,}5032$
$\log \sin\beta = 9{,}8725 - 10;\quad \beta = 48{,}21^0.$
$\gamma = 74{,}13^0.$

$a = \frac{h_b}{\sin\gamma};\ \log h_b = 1{,}4000$
$-\log \sin\gamma = \log \sin 74{,}13^0 = 9{,}9832 - 10$
$\log a = 1{,}4468;\quad a = 27{,}98\,\text{m}.$

$b = \frac{h_a}{\sin\gamma};\ \log h_a = 1{,}3757$
$-\log \sin\gamma = 9{,}9832 - 10$
$\log b = 1{,}3925;\quad b = 24{,}69\,\text{m}.$

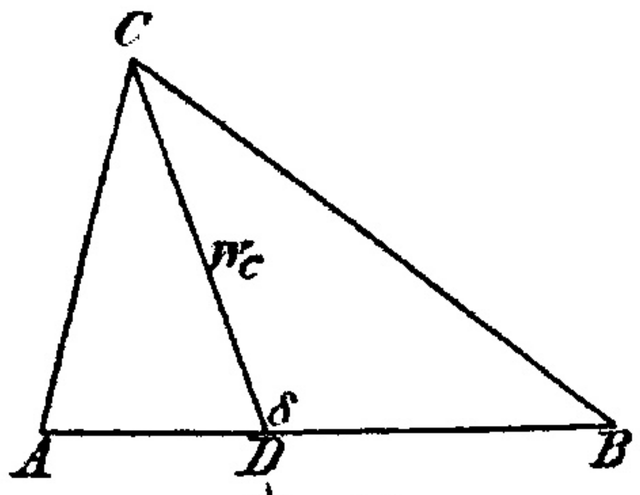


Fig. 16

4. Ein Dreieck zu berechnen aus $a = 237{,}9$ m; $w_c = 208{,}3$ m; $\beta = 42{,}46^0$.

Aus $\triangle$ DBC (Fig. 16) ist $\sin\delta = \frac{a\sin\beta}{w_c}$

$$\measuredangle DCB = \tfrac{1}{2}\gamma = 180^0 - (\beta + \delta)$$

Nach dem Satze vom Außenwinkel eines Dreiecks ist $\alpha = \delta - \frac{1}{2}\gamma$ und sodann aus $\triangle$ ABC

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}; \quad b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

$$\sin\delta = \frac{a\sin\beta}{w_c};$$

$\log a$	$= \log 237{,}9$	$= 2{,}3764$
$+\log\sin\beta$	$= \log\sin 42{,}46^0$	$= 9{,}8294 - 10$
		$2{,}2058$
$-\log w_c$	$= \log 208{,}3$	$= 2{,}3187$
	$\log\sin\delta =$	$9{,}8871 - 10$; $\quad \delta = 50{,}45^0$
	oder $\delta_1 = 180^0 - 50{,}45^0$	$\quad \delta_1 = 129{,}55^0$.

Der erste Wert von δ, $\delta = 50{,}45^0$ ergibt $\frac{1}{2}\gamma = 180^0 - (50{,}45^0 + 42{,}46^0) = 87{,}09°$, $\gamma = 174{,}18^0$. Dann wird aber $\beta + \gamma > 180^0$, was nicht möglich ist. Daher ist nur der zweite Wert von δ, $\delta_1 = 129{,}55^0$ eine Lösung der Aufgabe. Wir finden daraus $\gamma = 15{,}98°$ und $\alpha = \delta - \frac{1}{2}\gamma = 129{,}55^0 - 7{,}99^0 = 121{,}56^0$.

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha};$$

$\log a$		$= 2{,}3764$
$+\log\sin\gamma$	$= \log\sin 15{,}98^0$	$= 9{,}4398 - 10$
		$1{,}8162$
$-\log\sin\alpha$	$= \log\cos 31{,}56^0$	$= 9{,}9305 - 10$
	$\log c =$	$1{,}8857$; $\quad c = 76{,}86$ m.

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha};$$

$\log a$		$= 2{,}3764$
$+\log\sin\beta$		$= 9{,}8294 - 10$
		$2{,}2058$
$-\log\sin\alpha$		$= 9{,}9305 - 10$
	$\log b =$	$2{,}2753$; $\quad b = 188{,}5$ m.

5. Ein Dreieck zu berechnen aus der Summe zweier Seiten $a + b = 6{,}783$ m und den Winkeln $\alpha = 81{,}20^0$ und $\beta = 53{,}12^0$.

1. Geometrische Lösung: Wir verlängern in $\triangle$ ABC (Fig. 17) AC um BC und verbinden den Endpunkt D mit B durch eine Gerade; dann ist $AD = a + b$, $\measuredangle ADB = \frac{1}{2}\gamma$, $\measuredangle ABD = \beta + \frac{1}{2}\gamma$. (Vergleiche Planimetrie S. 44.)

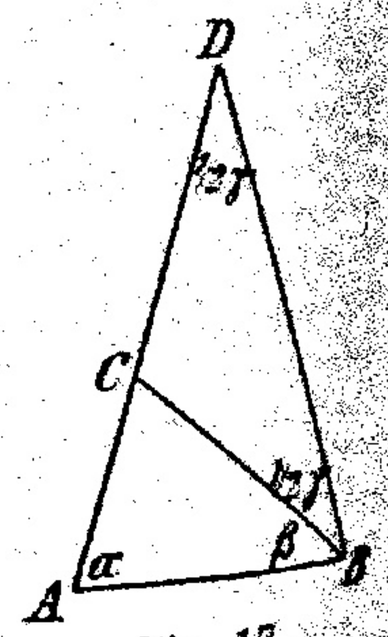


Fig. 17

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta); \quad c : (a + b) = \sin\tfrac{1}{2}\gamma : \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\gamma)$$

$$c = \frac{(a + b)\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin(\beta + \frac{1}{2}\gamma)}$$

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}; \quad b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} \text{ oder } b = (a + b) - a.$$

2. Analytische Lösung. Die einfachste Beziehung, die zwischen den Seiten und Winkeln besteht, ist die zum Halbmesser des umbeschriebenen Kreises.

$$a = 2r\sin\alpha; \quad b = 2r\sin\beta; \quad c = 2r\sin\gamma.$$

Daher ist $\frac{a + b}{c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma}$ (2r hebt sich fort)

oder nach Formel Xa in Kap. I.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\gamma} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$c = \frac{(a+b)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Dieser Wert ist gleichbedeutend mit dem vorhin aufgestellten, denn es ist

$$\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta);\quad \tfrac{1}{2}\gamma = 90^0 - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

daher $\sin\frac{1}{2}\gamma = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, da $\frac{1}{2}\gamma$ und $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ Komplementwinkel sind.

$$\beta + \tfrac{1}{2}\gamma = \beta + \tfrac{1}{2}[2\,R - (\alpha+\beta)] = \beta + R - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\beta$$
$$= R - \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

und somit $\sin(\beta+\frac{1}{2}\gamma) = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$$\log(a+b) = \log 6{,}783 = 0{,}8314$$
$$+\log\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \log\cos 67{,}16^0 = \underline{9{,}5890 - 10}$$
$$0{,}4204$$
$$-\log\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \log\cos 14{,}04^0 = \underline{9{,}9868 - 10}$$
$$\log c = 0{,}4336;\qquad c = 2{,}714\text{ m}.$$

$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$;

$$\log c = 0{,}4336$$
$$+\log\sin\alpha = \log\sin 81{,}20^0 = \underline{9{,}9949 - 10}$$
$$0{,}4285$$
$$-\log\sin\gamma = \log\sin 45{,}68^0 = \underline{9{,}8546 - 10}$$
$$\log a = 0{,}5739;\qquad a = 3{,}749\text{ m}.$$

$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$; Man findet ebenso: $b = 3{,}034$ m.

6. Im $\triangle$ ABC ist $b = 58{,}69$ m; $r = 36{,}88$ m; $\alpha = 43{,}43^0$. Wie groß sind die übrigen Seiten und Winkel des Dreiecks und wie groß ist sein Inhalt?

Es ist $a = 2r\sin\alpha$; $\sin\beta = \frac{b}{2r}$; $\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta)$; $c = 2r\sin\gamma$; $I = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

$a = 2r\sin\alpha$;

$$\log 2 = 0{,}3010$$
$$+\log r = \log 36{,}88 = 1{,}5668$$
$$+\log\sin\alpha = \log\sin 43{,}43^0 = \underline{9{,}8372 - 10}$$
$$\log a = 1{,}7050;\qquad a = 50{,}70\text{ m}.$$

$\sin\beta = \frac{b}{2r}$;

$$\log b = \log 58{,}69 = 1{,}7685$$
$$-\begin{cases}\log 2 = 0{,}3010\\ \log r = 1{,}5668\end{cases}$$
$$\log\sin\beta = 9{,}9007 - 10;\quad \beta = 52{,}72^0$$
$$\text{oder}\quad \beta_1 = 127{,}28^0.$$

Erste Lösung: $\alpha = 43{,}43^0$
$\beta = 52{,}72^0$
$\gamma = 83{,}85^0$

$c = 2r \sin\gamma$; $\log 2r = 1{,}8678$
$+ \log\sin\gamma = \log\sin 83{,}85^0 = 9{,}9975 - 10$
$\log c = 1{,}8653$; $c = 73{,}33$ m.

$I = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$; $\log 0{,}5 = 9{,}6990 - 10$
$+ \log b = 1{,}7685$
$+ \log c = 1{,}8653$
$+ \log\sin\alpha = 9{,}8372 - 10$
$\log I = 3{,}1700$; $I = 1479$ qm.

In derselben Weise findet man für $\beta_1 = 127{,}28^0$ die Werte
$\gamma_1 = 9{,}29^0$; $c_1 = 11{,}91$ m; $I_1 = 240{,}2$ qm.

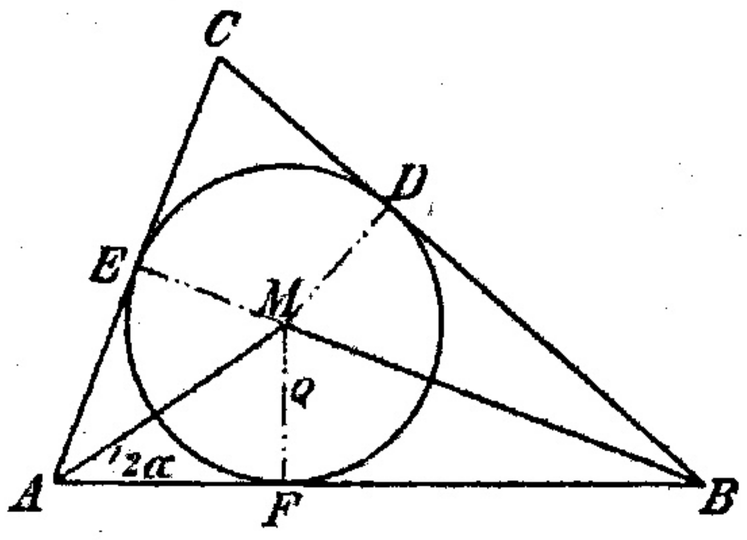


Fig. 18

7. Das Dreieck ABC zu berechnen aus $c = 105{,}98$ m; $\varrho = 27{,}64$ m; $\alpha = 78{,}40^0$. Im $\triangle$ ABC (Fig. 18) sei M der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, MF $\perp$ AB. Es ist $\sphericalangle MAF = \frac{1}{2}\alpha$ und

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{AF};\quad AF = \frac{\varrho}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha} = \varrho\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$FB = c - AF;\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\varrho}{FB};\quad \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

$$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma};\quad a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

$AF = \varrho\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$;
$\log\varrho = \log 27{,}64 = 1{,}4415$
$+ \log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha = \log\operatorname{cotg} 39{,}20^0 = 0{,}0885$
$\log AF = 1{,}5300$; $AF = 33{,}88$ m

$c = 105{,}98$ m
$- AF = 33{,}88$ m
$BF = 72{,}10$ m.

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{\varrho}{BF}$;
$\log\varrho = 1{,}4415$
$- \log BF = \log 72{,}10 = 1{,}8579$
$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = 9{,}5836 - 10$; $\frac{1}{2}\beta = 20{,}97^0$

$\alpha = 78{,}40^0$
$\frac{1}{2}\beta = 20{,}97^0$
$\beta = 41{,}94^0$
$\gamma = 59{,}66^0$.

$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$;
$\log c = \log 105{,}98 = 2{,}0252$
$+ \log\sin\beta = \log\sin 41{,}94^0 = 9{,}8250 - 10$
$1{,}8502$
$- \log\sin\gamma = \log\sin 59{,}66^0 = 9{,}9360 - 10$
$\log b = 1{,}9142$; $b = 82{,}08$ m.

Ebenso:
$a = 120{,}28$ m.

8. Das Dreieck ABC zu berechnen aus $c = 72{,}54$ m, $t_c = 58{,}29$ m; $t_a = 64{,}74$ m. Wir beachten hier, daß die Mittellinien eines Dreiecks einander in $\frac{2}{3}$ ihrer Länge schneiden. Es ist also (Fig. 19) $AF = \frac{2}{3}t_a$, $DF = \frac{1}{3}t_c$, $AD = \frac{1}{2}c$. Aus $\triangle$ ADF ist $\sin\frac{1}{2}\alpha_1 = \sqrt{\frac{(s - \frac{1}{2}c)(s - \frac{2}{3}t_a)}{\frac{1}{2}c \cdot \frac{2}{3}t_a}}$, wo $2s = \frac{1}{2}c + \frac{2}{3}t_a + \frac{1}{3}t_c$.

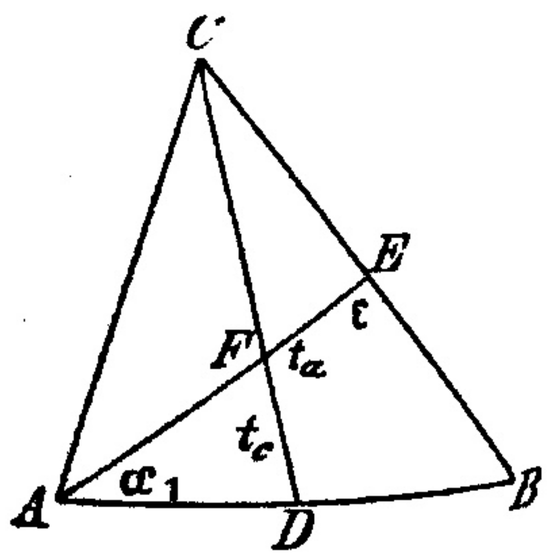


Fig. 19

Im Dreieck ABE sind uns jetzt 2 Seiten c und t_a und der eingeschlossene Winkel α_1 bekannt, wir können also darauf den Tangentensatz anwenden. Bezeichnen wir den $\sphericalangle$ AEB mit ε, so ist:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon-\beta}{2}=\frac{c-t_a}{c+t_a}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon+\beta}{2}$$

und sodann mittelst des Sinussatzes $a=\frac{2c\sin\alpha_1}{\sin\varepsilon}$.

In entsprechender Weise finden wir aus $\triangle$ ABC:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}=\frac{c-a}{c+a}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2} \text{ und } b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

$t_a = 64{,}74;\ \frac{2}{3}t_a = 43{,}16$
$t_c = 58{,}29;\ \frac{1}{3}t_c = 19{,}43$
$c = 72{,}54;\ \frac{1}{2}c = 36{,}27$
$2s = 98{,}86;\ s = 49{,}43.$

$\log(s-\frac{1}{2}c) = \log 13{,}16 = 1{,}1193$
$+\log(s-\frac{2}{3}t_a) = \log 6{,}27 = 0{,}7973$
$1{,}9166$

$-\begin{cases}\log(\frac{1}{2}c) = \log 36{,}27 = 1{,}5595\\ \log(\frac{2}{3}t_a) = \log 43{,}16 = 1{,}6351\end{cases}$
$8{,}7220-10$

$\log\sin\frac{1}{2}\alpha_1 = 9{,}3610-10;$ [2] $\quad \frac{1}{2}\alpha_1 = 13{,}275^0$
$\alpha_1 = 26{,}55^0$

$\log(c-t_a) = \log 7{,}80 = 0{,}8921$
$-\log(c+t_a) = \log 137{,}28 = 2{,}1376$
$8{,}7545-10$

$\varepsilon+\beta = 153{,}45^0$
$\frac{\varepsilon+\beta}{2} = 76{,}725^0$

$+\log\operatorname{tg}\frac{(\varepsilon+\beta)}{2} = \log\operatorname{tg}76{,}725^0 = 0{,}6273$

$\log\operatorname{tg}\frac{\varepsilon-\beta}{2} = 9{,}3818-10;\ \frac{\varepsilon-\beta}{2} = 13{,}54^0$

$\varepsilon = 90{,}265^0$
$\beta = 63{,}185^0$

$\log 2 = 0{,}3010$
$+\log c = \log 72{,}54 = 1{,}8605$
$+\log\sin\alpha_1 = \log\sin 26{,}55^0 = 9{,}6503-10$
$1{,}8118$

$\log\sin\varepsilon = \log\cos 0{,}265^0 = 0{,}0000$
$\log a = 1{,}8118;\ a = 64{,}83$ m.

$\log(c-a) = \log 7{,}71 = 0{,}8871$
$-\log(c+a) = \log 137{,}37 = 2{,}1379$
$8{,}7492-10$

$+\log\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2} = \log\operatorname{tg}58{,}408^0 = 0{,}2112$ $\quad \frac{\gamma+\alpha}{2} = 58{,}408^0$

$\log\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2} = 8{,}9604-10;\ \frac{\gamma-\alpha}{2} = 5{,}216^0$

$\gamma = 63{,}62^0$
$\alpha = 53{,}19^0$

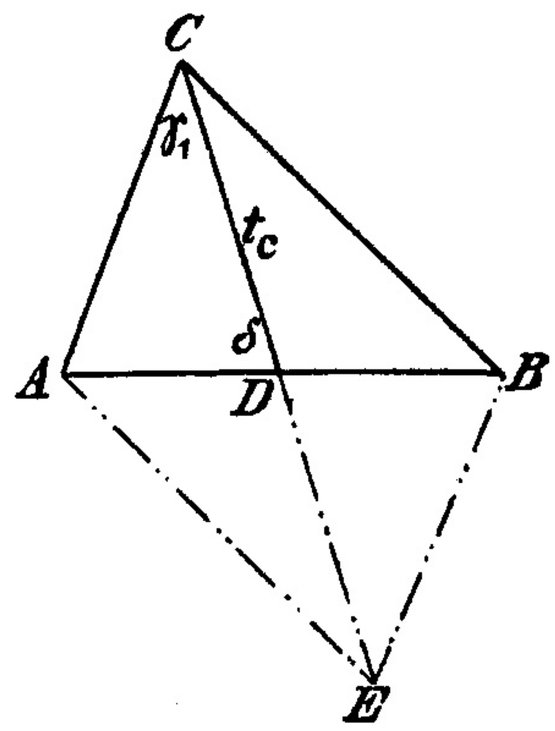


Fig. 20

und aus $b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$ in der üblichen Weise $\quad b = 72{,}25$ m.

9. Das Dreieck ABC zu berechnen aus $a = 96{,}54$ m; $b = 65{,}14$ m; $t_c = 70{,}36$ m. (Vergleiche Planimetrie, S. 45.) Verlängern wir die Mittellinie CD (Fig. 20) um sich selbst, machen also DE = CD, so ist im $\triangle$ AEC die Seite AE = a, CE = $2t_c$. In diesem Dreieck sind uns die drei Seiten bekannt; wir bestimmen daher $\sphericalangle$ ACE = γ_1 durch

$$\sin\gamma_1=\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-2t_c)}{b\,.\,2t_c}},\ \text{wo } s=\tfrac{1}{2}(2t_c+a+b)=t_c+\tfrac{1}{2}(a+b) \text{ ist.}$$

Sodann ist aus $\triangle$ ADC, wenn wir $\sphericalangle$ ADC mit δ bezeichnen,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\delta}{2}=\frac{t_0-b}{t_0+b}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\delta}{2}$$

und nun aus $\triangle$ ABC

$$\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a};\quad \gamma=180^0-(\alpha+\beta);\quad c=\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Es seien jetzt nur die Einzelresultate angegeben, die Ausrechnung mag dem Leser überlassen bleiben.

$s=151{,}20$; $\frac{1}{2}\gamma_1=18{,}287^0$; $\gamma_1=36{,}57^0$; $\frac{1}{2}(\alpha+\delta)=71{,}71^0$; $\frac{1}{2}(\alpha-\delta)=6{,}65^0$; daher $\alpha=78{,}36^0$. $\beta=41{,}37^0$, somit $\gamma=60{,}27^0$ und $c=85{,}58$ m.

10. Das Viereck ABCD zu berechnen aus $a=87{,}35$ m; $e=79{,}29$ m; $f=94{,}84$ m, $\alpha=93{,}47^0$; $\beta=58{,}29^0$.

Unter Annahme der Bezeichnungen der Figur 21 ist aus $\triangle$ ABD: $\sin\delta_1=\frac{a\sin\alpha}{f}$, und da $\sin\beta_1=\sin(\alpha+\delta_1)$, so ergibt sich

$$d=\frac{a\sin(\alpha+\delta_1)}{\sin\delta_1}.$$

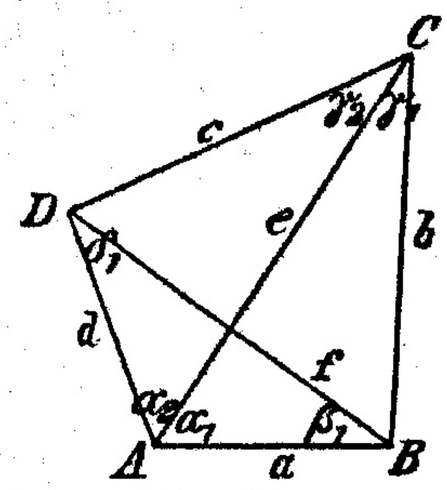


Fig. 21

Ebenso aus $\triangle$ ABC: $\sin\gamma_1=\frac{a\sin\beta}{e}$ und $b=\frac{a\sin(\beta+\gamma_1)}{\sin\gamma_1}$.

Im Dreieck ABC ist $\sphericalangle\alpha_1=180^0-(\beta+\gamma_1)$, daher $\alpha_2=\alpha-\alpha_1=\alpha+\beta+\gamma_1-180^0$, und nun kennen wir in $\triangle$ ADC 2 Seiten: $AC=e$, $AD=d$ und den eingeschlossenen Winkel α_2, mithin bestimmen wir die anderen Winkel dieses Dreiecks durch den Tangentensatz

$$\operatorname{tg}\frac{\delta-\gamma_2}{2}=\frac{e-d}{e+d}\operatorname{tg}\frac{\delta+\gamma_2}{2}.$$

Zuletzt ist noch $c=\frac{e\sin\alpha_2}{\sin\delta}$ und $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$.

Durch Ausrechnung ergibt sich $\delta_1=66{,}83^0$; $d=32{,}04$ m.
$\gamma_1=69{,}60^0$; $b=73{,}55$ m.
$\alpha_2=41{,}36^0$; $\frac{\delta-\gamma_2}{2}=48{,}36^0$
$\delta=117{,}68^0$; $\gamma_2=20{,}96^0$
$c=59{,}16$ m; $\gamma=90{,}56^0$.

11. Das Viereck ABCD zu berechnen aus $a=235{,}7$ m; $b=358{,}4$ m; $c=418{,}6$ m; $e=578{,}5$ m; $\gamma=116{,}76^0$.

Aus $\triangle$ ABC (Fig. 22) ist $\sin\frac{1}{2}\gamma_1=\sqrt{\frac{(s-b)(s-e)}{be}}$,

wo $s=\frac{1}{2}(a+b+e)$ und $\sin\beta=\frac{e\sin\gamma_1}{a}$. Im $\triangle$ ACD ist $\gamma_2=\gamma-\gamma_1$ und

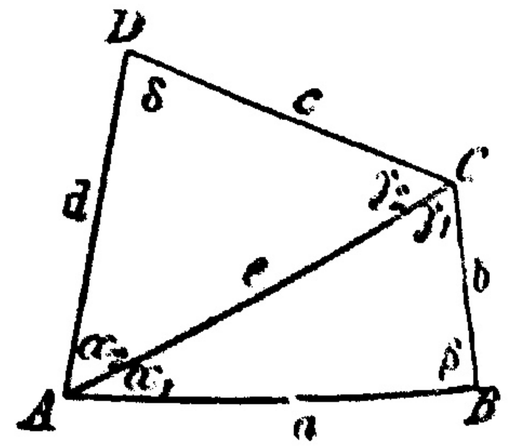


Fig. 22

$$\operatorname{tg}\frac{\delta-\alpha_2}{2}=\frac{e-c}{e+c}\operatorname{tg}\frac{\delta+\alpha_2}{2}$$

$$\sphericalangle\alpha=360^0-(\beta+\gamma+\delta);\quad d=\frac{c\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2}.$$

Durch Ausrechnung erhalten wir zunächst $\frac{1}{2}\gamma_1=5{,}314^0$, also $\gamma_1=10{,}63^0$ und $\log\sin\beta=9{,}6558-10$. Diesem Logarithmus entsprechen die beiden Winkel $\beta=26{,}91^0$ und $\beta=153{,}09^0$. Bei Annahme des ersten Wertes von β würde der dritte Winkel α_1, des Dreiecks ABC größer sein als β, während $b<e$. Da dies nicht möglich ist, kann $\sphericalangle\beta$ nur den zweiten Wert $\beta=153{,}09^0$ haben.

Weiter ist dann $\frac{\delta-\alpha_2}{2}=6{,}875^0$; $\delta=43{,}81^0$; $\alpha_2=30{,}06^0$; $\alpha=46{,}34^0$ und $d=802{,}6$ m.

Berechnung einzelner Stücke

12. In dem Dreieck ABC ist $w_a = 2{,}376$ m; $\alpha = 64{,}21^0$; $\gamma = 41{,}64^0$. Wie groß ist die Mittellinie auf die Seite b, t_b?

Sollen nur einzelne Stücke bestimmt werden, so haben wir uns bei der Ableitung der Formeln und der Berechnung auf diejenigen Stücke des Dreiecks zu beschränken, die zur Lösung der Aufgabe nötig sind.

t_b (Fig. 23) können wir aus dem Dreieck EBC berechnen. Zu dem Zwecke berechnen wir a und b. Aus $\triangle$ ADC ist $b = \frac{w_a \sin(\alpha + \frac{1}{2}\gamma)}{\sin \alpha}$, denn $\alpha + \frac{1}{2}\gamma$ ist das Supplement von $\sphericalangle$ ADC.

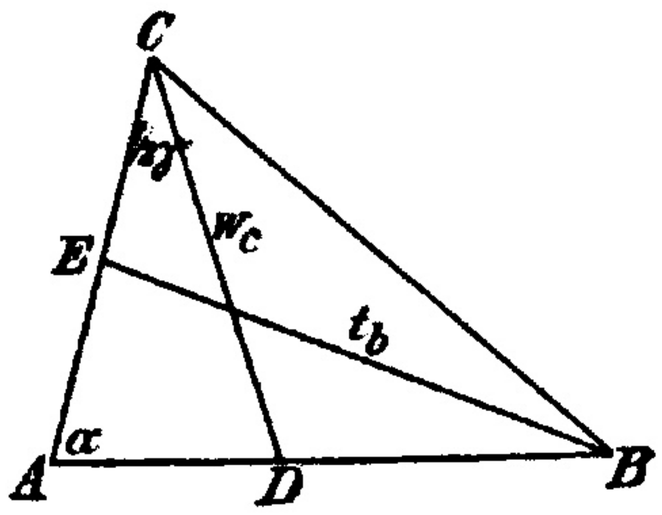


Fig. 23

Dann ist aus $\triangle$ ABC: $a = \frac{b \sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$.

In $\triangle$ EBC kennen wir jetzt 2 Seiten a und $\frac{1}{2}$b und den eingeschlossenen Winkel γ. Da wir nur t_b zu berechnen haben, wenden wir am besten nicht den Tangentensatz, sondern den Cosinussatz an.

$$t_b = \sqrt{a^2 + (\tfrac{1}{2}b)^2 - 2a \cdot \tfrac{1}{2}b \cos\gamma} = \sqrt{a^2 + (\tfrac{1}{2}b)^2 - ab\cos\gamma}.$$

Durch Berechnung der beiden ersten Formeln finden wir $\log b = 0{,}4197$ und $\log a = 0{,}3909$. a und b selbst brauchen wir bei der weiteren Ausrechnung nicht, es ist daher nicht nötig, den Numerus zu den Logarithmen aufzuschlagen.

$$\begin{aligned}
\log a &= 0{,}3909 \\
&\quad \overline{\text{num } 0{,}7818} \cdot 2 = 6{,}050 \\
\log b &= 0{,}4197 \\
-\log 2 &= 0{,}3010 \\
&\quad \overline{0{,}1187} \\
&\quad \overline{\text{num } 0{,}2374} \cdot 2 = 1{,}728 \\
&\quad \overline{7{,}778} \\
\log a &= 0{,}3909 \\
+\log b &= 0{,}4197 \\
+\log \cos\gamma = \log \cos 41{,}64^0 &= \overline{9{,}8735 - 10} \\
&\quad \overline{\text{num } 0{,}6841} = 4{,}832 \\
&\quad \overline{t_b^2 = 2{,}946} \\
\log 2{,}946 &= 0{,}4692 \\
&\quad \overline{\text{num } 0{,}2346} = 1{,}716; \qquad t_b = 1{,}716 \text{ m.}
\end{aligned}$$

13. In dem Dreieck ABC ist gegeben $r = 3{,}784$ m; $\alpha = 62{,}24^0$; $\beta = 50{,}41^0$. Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks?

Es ist $a = 2r \sin\alpha$; $b = 2r \sin\beta$; daher ist

$$I = \tfrac{1}{2} ab \sin\gamma = \tfrac{1}{2} \cdot 2r \sin\alpha \cdot 2r \sin\beta \sin(\alpha + \beta).$$

$$I = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned}
\log r &= 3{,}784 &&= \overline{0{,}5779} \cdot 2 \\
&&&\quad \overline{1{,}1558} \\
+\log 2 &&&= 0{,}3010 \\
+\log \sin\alpha &= \log \sin 62{,}24^0 &&= 9{,}9469 - 10 \\
+\log \sin\beta &= \log \sin 50{,}41^0 &&= 9{,}8869 - 10 \\
+\log \sin(\alpha + \beta) &= \log \cos 22{,}65^0 &&= \overline{9{,}9651 - 10} \\
&&\log I &= \overline{1{,}2557}; \qquad I = 18{,}02 \text{ qm.}
\end{aligned}$$

14. Die Entfernung zweier Punkte A und B im Felde zu bestimmen, wenn man zu keinem dieser Punkte kommen kann.

Wir messen eine Strecke CD, die so liegt, daß man von ihren Endpunkten die Punkte A und B sehen kann und bestimmen die Winkel, welche die Strecke mit den Verbindungen ihrer Endpunkte mit A und B einschließt.

In Fig. 24 sei $AB = a$ die gesuchte Entfernung, CD die gemessene Strecke $c = 50$ m; ferner $\sphericalangle ADB = \alpha = 62{,}825^0$; $\sphericalangle BDC = \beta = 43{,}325^0$; $\sphericalangle ACD = \gamma = 63{,}85^0$ und $\sphericalangle ACB = \delta = 67{,}52^0$.

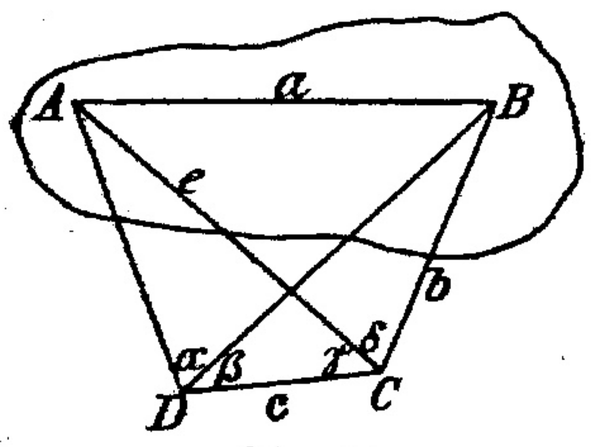


Fig. 24

Bezeichnen wir BC mit b und AC mit e, so finden wir durch den Sinussatz

$$\text{aus } \triangle CDA: \quad AC = e = \frac{c \sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$\text{aus } \triangle CDB: \quad BC = b = \frac{c \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}$$

wobei im Nenner wieder statt des betr. Winkels sein Supplement gesetzt ist. Aus $\triangle ABC$ ist dann

$$AB^2 = a^2 = b^2 + e^2 - 2be\cos\delta,$$

so daß die Ausrechnung hier dieselbe ist wie in Nr. 12.

Die logarithmische Berechnung können wir jedoch noch einfacher gestalten durch Einführung eines Hilfswinkels φ (griechischer Buchstabe, gelesen: phi). Die letzte Formel läßt sich umändern in die Form

$$a^2 = (b-e)^2 + 2be - 2be\cos\delta$$
$$= (b-e)^2 + 2be(1-\cos\delta)$$

Nun ist nach Kap. I, Formel VIIIa $1 - \cos\delta = 2\sin^2\frac{1}{2}\delta$, so daß

$$a^2 = (b-e)^2 + 4be\sin^2\tfrac{1}{2}\delta$$
$$= (b-e)^2\left[1 + \left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\delta\sqrt{be}}{b-e}\right)^2\right].$$

Setzen wir jetzt $\frac{2\sin\frac{1}{2}\delta\sqrt{be}}{b-e} = \operatorname{tg}\varphi$, wo φ der einzuführende Hilfswinkel ist, so ist

$$a^2 = (b-e)^2\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi).$$

Es ist aber

$$1+\operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi},$$ so daß

$$a^2 = \frac{(b-e)^2}{\cos^2\varphi};\quad a = \frac{b-e}{\cos\varphi}.$$

Ist also $a^2 = b^2 + e^2 - 2be\cos\delta$, so ist

$$a = \frac{b-e}{\cos\varphi};\ \text{wenn}\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}\delta\sqrt{be}}{b-e}.$$

$\log c$	$= \log 50$	$1{,}6990$	
$+\log\sin(\alpha+\beta)$	$= \log\cos 16{,}15^0$	$= 9{,}9825 - 10$	
		$1{,}6815$	
$-\log\sin(\alpha+\beta+\gamma)$	$= \log\cos 80^0$	$= 9{,}2397 - 10$	
		$\log e = 2{,}4418;$	$e = 276{,}6$ m.
$\log c$		$= 1{,}6990$	
$+\log\sin\beta$	$= \log\sin 43{,}325^0$	$= 9{,}8364 - 10$	
		$1{,}5354$	
$-\log\sin(\beta+\gamma+\delta)$	$= \log\cos 84{,}695^0$	$= 8{,}9659 - 10$	
		$\log b = 2{,}5695;$	$b = 371{,}1$ m.
			$b - e = 94{,}5$ m.
$\log b$		$= 2{,}5695$	
$+\log e$		$= 2{,}4418$	
		$5{,}0113$	2)
		$2{,}5057$	
$+\log 2$		$= 0{,}3010$	
$+\log\sin\frac{1}{2}\delta$	$= \log\sin 33{,}76^0$	$= 9{,}7449 - 10$	
		$2{,}5516$	
$-\log(b-e)$	$= \log 94{,}5$	$= 1{,}9754$	
		$\log\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5762;$	$\varphi = 75{,}14^0.$

$\log (b - e) = 1{,}9754$

$-\log \cos \varphi = \log \cos 75{,}14^\circ = 9{,}4090 - 10$

$\log a = 2{,}5664$; $a = 368{,}5$ m.

15. Von einem Dreieck ABC sind uns zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben. Es sollen die Entfernungen eines Punktes D von den Ecken des Dreiecks bestimmt werden, wenn man die Winkel kennt, unter denen die Seiten des Dreiecks von dem Punkte aus gesehen werden.

Diese Aufgabe, das sogenannte Rückwärtseinschneiden, ist für die Feldmeßkunst besonders wichtig. Ihre Lösung gestattet, aus der bekannten Lage dreier Punkte die eines beliebigen Punktes zu bestimmen, von dem aus die drei Punkte sichtbar sind, und zwar, indem man nur Winkelmessungen von diesem Punkte aus vornimmt. Zuerst ist diese Aufgabe behandelt und gelöst von Willebrord Snellius (1581—1626), dem Entdecker des Gesetzes von der optischen Brechung. Freilich wurde seine Lösung wenig bekannt, und als 1692 Laurent Pothenot der Pariser Akademie der Wissenschaften eine Lösung einreichte, glaubte man, daß er damit eine wichtige Entdeckung gemacht habe, und nannte die Aufgabe nach ihm die Pothenotsche.

Wenn wir die Bezeichnungen der Fig. 25 anwenden, so ist aus

$$\triangle ADC: \quad CD = \frac{b \sin \delta}{\sin \beta},$$

$$\text{aus } \triangle BDC: \quad CD = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin \alpha}.$$

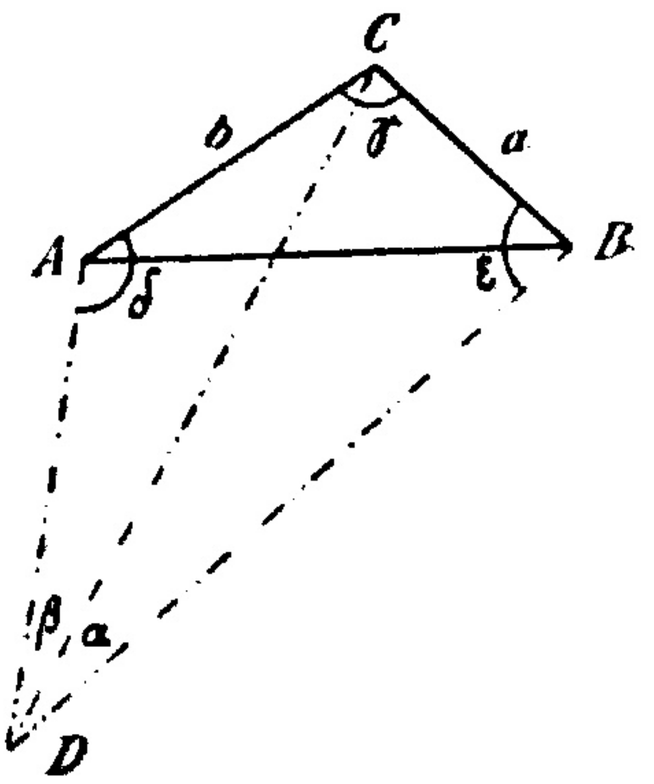


Fig. 25

Da die beiden Werte von CD einander gleich sein müssen, so ist

$$\frac{b \sin \delta}{\sin \beta} = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin \alpha}$$

$$\text{und somit auch } \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}$$

oder, wenn wir die Gleichung in der Form einer Proportion schreiben:

$$\sin \delta : \sin \varepsilon = a \sin \beta : b \sin \alpha.$$

In einer Proportion verhält sich aber die Differenz der beiden ersten Glieder zu ihrer Summe wie die Differenz der beiden letzten Glieder zu deren Summe (Arithmetik II, S. 52); daher ist

$$(\sin \delta - \sin \varepsilon) : (\sin \delta + \sin \varepsilon) = (a \sin \beta - b \sin \alpha) : (a \sin \beta + b \sin \alpha)$$

oder in anderer Form

$$\frac{\sin \delta - \sin \varepsilon}{\sin \delta + \sin \varepsilon} = \frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha} = \frac{1 - \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}}{1 + \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}}.$$

Führen wir hierin den Hilfswinkel φ ein, den wir durch

$$1) \quad \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \operatorname{tg} \varphi$$

bestimmen, so geht die letzte Gleichung über in:

$$2) \quad \frac{\sin \delta - \sin \varepsilon}{\sin \delta + \sin \varepsilon} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi}.$$

Um aus den Differenzen und Summen von Funktionen Produkte zu erhalten, wenden wir die Formeln X auf Seite 8 an. Danach geht die linke Seite der Gleichung über in (vgl. S. 15, 4).

$$\frac{\sin \delta - \sin \varepsilon}{\sin \delta + \sin \varepsilon} = \frac{2 \cos \frac{\delta + \varepsilon}{2} \cdot \sin \frac{\delta - \varepsilon}{2}}{2 \sin \frac{\delta + \varepsilon}{2} \cdot \cos \frac{\delta - \varepsilon}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta - \varepsilon}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta + \varepsilon}{2}}.$$

Wenn wir die rechte Seite mit $\cos\varphi$ erweitern und dann ähnlich verfahren, erhalten wir:

$$\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}=\frac{1-\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1+\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}=\frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi}=\frac{\sin(90^0-\varphi)-\sin\varphi}{\sin(90^0-\varphi)+\sin\varphi}.$$

Hieraus finden wir aber wieder nach den Formeln X, wenn wir darin $90^0-\varphi$ für α und φ für β setzen und dividieren:

$$\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{90^0-\varphi-\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{90^0-\varphi+\varphi}{2}},$$

so daß dann:

$$\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\operatorname{tg}(45^0-\varphi)}{\operatorname{tg}45^0}=\operatorname{tg}(45^0-\varphi).$$

Aus Gleichung 2) wird durch Einsetzen der erhaltenen Werte:

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\delta-\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\delta+\varepsilon}{2}}=\operatorname{tg}(45^0-\varphi)$$

$$3)\qquad \operatorname{tg}\frac{\delta-\varepsilon}{2}=\operatorname{tg}(45^0-\varphi)\operatorname{tg}\frac{\delta+\varepsilon}{2}$$

$\delta+\varepsilon$ ergibt sich aber aus dem Viereck DBCA zu $360^0-(\alpha+\beta+\gamma)$, also $\frac{1}{2}(\delta+\varepsilon)$ $=180^0-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$, und nun erhalten wir aus 3) $\dfrac{\delta-\varepsilon}{2}$, wonach wir δ und ε kennen. Jetzt sind in jedem der Dreiecke DCA und DCB eine Seite und zwei Winkel bekannt, wir können daher die beiden anderen Seiten durch den Sinussatz bestimmen.

Fassen wir den Gang der Rechnung zusammen! Gegeben sind uns a, b, γ und α und β. Wir setzen:

$$\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}=\operatorname{tg}\varphi,$$

bestimmen $\quad\frac{1}{2}(\delta+\varepsilon)=180^0-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$

und $\frac{1}{2}(\delta-\varepsilon)$ durch $\quad\operatorname{tg}\dfrac{\delta-\varepsilon}{2}=\operatorname{tg}(45^0-\varphi)\operatorname{tg}\dfrac{\delta+\varepsilon}{2}$.

Dann ist aus den Dreiecken ACD und BCD:

$$AD=\frac{b\sin(\beta+\delta)}{\sin\beta},\quad BD=\frac{a\sin(\alpha+\varepsilon)}{\sin\alpha},\quad\text{und}\quad CD=\frac{b\sin\delta}{\sin\beta}=\frac{a\sin\varepsilon}{\sin\alpha}.$$

Durch die Berechnung von CD auf beide Arten haben wir zugleich eine Kontrolle für die Richtigkeit unserer Rechnung.

Beispiel: $a=428{,}9\text{ m};\ b=653{,}6\text{ m};\ \sphericalangle\gamma=112{,}65^0;\ \alpha=19{,}67^0;\ \beta=23{,}54^0.$

$$\begin{aligned}
&\log b &&= \log 653{,}6 &&= 2{,}8153\\
+&\log\sin\alpha &&= \log\sin 19{,}67^0 &&= 9{,}5271-10\\
&&&&&\overline{2{,}3424}\\
-\Big\{&\log a &&= \log 428{,}9 &&= 2{,}6324\\
&\log\sin\beta &&= \log\sin 23{,}54^0 &&= 9{,}6014-10\\
&&&&&\overline{\log\operatorname{tg}\varphi=0{,}1086};\quad \varphi=52{,}09^0
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}(\delta+\varepsilon)=180^0-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=180^0-77{,}93^0=102{,}07^0.$$

Hier ist $\frac{1}{2}(\delta+\varepsilon)>90^0$ und $\varphi>45^0$; wir setzen daher

$$\operatorname{tg}(45^0-\varphi)=-\operatorname{tg}(\varphi-45^0)$$

und $\quad\operatorname{tg}\dfrac{\delta+\varepsilon}{2}=-\operatorname{cotg}\left[\dfrac{\delta+\varepsilon}{2}-90^0\right],$

so daß $\quad\operatorname{tg}\dfrac{\delta-\varepsilon}{2}=\operatorname{tg}(\varphi-45^0)\operatorname{cotg}\left[\dfrac{\delta+\varepsilon}{2}-90^0\right].$

$\log \operatorname{tg}(\varphi - 45^0) = \log \operatorname{tg} 7{,}09^0 = 9{,}0948 - 10$
$+ \log \operatorname{cotg}[\frac{1}{2}(\delta + \varepsilon) - 90^0] = \log \operatorname{cotg} 12{,}07^0 = 0{,}6699$

$\log \operatorname{tg} \frac{\delta - \varepsilon}{2} = 9{,}7647 - 10$; $\frac{1}{2}(\delta + \varepsilon) = 102{,}07^0$, $\frac{1}{2}(\delta - \varepsilon) = 30{,}19^0$, $\delta = 132{,}26^0$, $\varepsilon = 71{,}88^0$

$\log b = 2{,}8153$
$+ \log \sin(\beta + \delta) = \log \cos 65{,}80^0 = 9{,}6127 - 10$
$2{,}4280$
$- \log \sin \beta = 9{,}6014 - 10$
$\log AD = 2{,}8266$; $AD = 670{,}8$ m.

$\log a = 2{,}6324$
$+ \log \sin(\alpha + \varepsilon) = \log \cos 1{,}55^0 = 9{,}9998 - 10$
$2{,}6322$
$- \log \sin \alpha = 9{,}5271 - 10$
$\log BD = 3{,}1051$; $BD = 1274$ m.

$\log b = 2{,}8153$
$+ \log \sin \delta = \log \cos 42{,}26^0 = 9{,}8693 - 10$
$2{,}6846$
$- \log \sin \beta = 9{,}6014 - 10$
$\log CD = 3{,}0832$

$\log a = 2{,}6324$
$+ \log \sin \varepsilon = \log \sin 71{,}88^0 = 9{,}9779 - 10$
$2{,}6103$
$- \log \sin \alpha = 9{,}5271 - 10$
$\log CD = 3{,}0832$

$CD = 1211$ m.

16. Ein Stück Land hat die Gestalt eines Fünfecks. Zur Bestimmung seiner Größe mißt man die Länge einer Seite und die Winkel, unter denen die übrigen Seiten von den Endpunkten der ersten erscheinen.

Fig. 26 stelle uns das Feld dar und es sei $AB = a = 32{,}78$ m; $\sphericalangle BAC = \alpha_1 = 38{,}27^0$; $\sphericalangle CAD = \alpha_2 = 44{,}56^0$; $\sphericalangle DAE = \alpha_3 = 32{,}74^0$; $\sphericalangle ABE = \beta_1 = 26{,}83^0$; $\sphericalangle EBD = \beta_2 = 34{,}35^0$; $\sphericalangle DBC = \beta_3 = 43{,}67^0$.

Aus $\triangle ABD$ ist: $BD = f = \frac{a \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)}$; $AD = g = \frac{a \sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)}$;

aus $\triangle ABC$: $BC = b = \frac{a \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta)}$, wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$;

aus $\triangle ABE$: $AE = e = \frac{a \sin \beta_1}{\sin(\alpha + \beta_1)}$, wenn $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

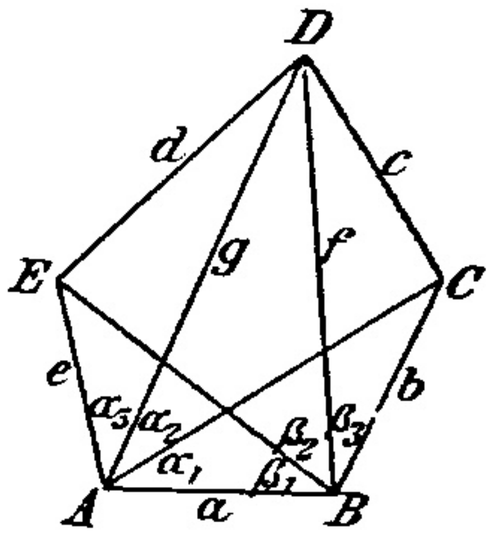


Fig. 26

Der Inhalt I des Fünfecks ist

$I = \triangle BCD + \triangle ABD + \triangle ADE$
$= \frac{1}{2}[bf \sin \beta_3 + af \sin(\beta_1 + \beta_2) + eg \sin \alpha_3]$.

Durch Ausrechnung erhalten wir

$\log f = 1{,}7431$; $\log g = 1{,}6891$; $\log b = 1{,}5292$; $\log e = 1{,}3848$.

(Die Längen selbst brauchen wir zur Berechnung des Inhaltes nicht.)

Der Inhalt ist $I = \frac{1}{2}(1293 + 1590 + 641{,}2) = \frac{1}{2} \cdot 3524 = 1762$ qm.

Aufgaben

Das Dreieck ABC zu berechnen (Seiten, Winkel und Inhalt), wenn

1) $c = 31{,}86$ m; $h_a = 23{,}75$ m; $h_b = 26{,}91$ m.
2) $h_c = 3{,}256$ m; $t_c = 3{,}894$ m; $\alpha = 73{,}40^0$.
3) $h_a = 32{,}76$ m; $w_c = 43{,}04$ m; $\gamma = 82{,}46^0$.
4) $h_c = 18{,}57$ m; $\varrho = 7{,}368$ m; $\alpha = 78{,}46^0$.
5) $a = 532{,}7$ m; $w_c = 491{,}5$ m; $h_b = 427{,}6$ m.
6) $w_c = 23{,}76$ m; $\alpha = 64{,}21^0$; $\gamma = 41{,}64^0$.
7) $b = 65{,}89$ m; $c = 104{,}94$ m; $t_c = 62{,}17$ m.
8) $c = 34{,}75$ m; $t_c = 26{,}94$ m; $\beta = 73{,}43^0$.
9) In einem Parallelogramm ABCD ist die Seite $BC = b = 297{,}6$ m; die Diagonale $AC = e = 683{,}5$ m; $\sphericalangle DAB = \alpha = 38{,}41^0$. Wie groß ist der Inhalt des Parallelogramms?
10) Im Viereck ABCD ist $a = 23{,}57$ m; $b = 27{,}85$ m; $e = 30{,}27$ m; $\alpha = 85{,}46^0$; $\gamma = 104{,}60^0$. Wie groß sind c, d, β, δ, I?

Antworten

1) $\sin\alpha = \frac{h_b}{c}$; $\sin\beta = \frac{h_a}{c}$; $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$;

$a = \frac{h_b}{\sin\gamma}$; $b = \frac{h_a}{\sin\gamma}$; $I = \frac{1}{2} a h_a$;

$\alpha = 57{,}66^0$; $\beta = 48{,}21^0$; $\gamma = 74{,}13^0$; $a = 27{,}975$ m; $b = 24{,}69$ m; $I = 332{,}3$ qm.

2) $b = \frac{h_c}{\sin\alpha}$; $\sin(c, t_c) = \frac{h_c}{t_c}$; $\frac{1}{2} c = b\cos\alpha + t_c\cos(c, t_c)$; $CD \perp AB$; E Mitte von AB; $BD = \frac{1}{2} c + DE$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{BD}$; $a = \frac{h_c}{\sin\beta}$;

$b = 3{,}398$ m; $\sphericalangle(c, t_c) = 56{,}74^0$ (der stumpfe Winkel ist nicht möglich); $AD = 0{,}9708$ m.
$c = 6{,}213$ m; $\beta = 31{,}85^0$; $\gamma = 74{,}75^0$; $a = 6{,}17$ m; $I = 10{,}12$ qm.

3) $b = \frac{h_a}{\sin\gamma}$; $\sphericalangle(c, w_c) = \varepsilon$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon) = \frac{w_c - b}{w_c + b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)$; $\beta = \varepsilon - \frac{1}{2}\gamma$; $c = \frac{h_a}{\sin\beta}$;

$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$; $I = \frac{1}{2} a h_a$.

$b = 33{,}04$ m; $\alpha = 88{,}65^0$; $\beta = 8{,}89^0$; $c = 212{,}0$ m; $a = 213{,}8$ m; $I = 3501$ qm.

4) $ME \perp AC$; $b = \frac{h_c}{\sin\alpha}$; $AE = \varrho\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$; $CE = b - AE$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho}{CE}$;

$\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)$; $a = \frac{h_c}{\sin\beta}$; $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$; $I = \frac{1}{2} c h_c$.

$b = 18{,}95$ m; $\gamma = 73{,}19^0$; $\beta = 28{,}35^0$; $a = 39{,}10$ m; $c = 38{,}21$ m; $I = 3518$ qm.

5) $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$; $\sphericalangle(c, w_c) = \delta$; $\operatorname{tg}\frac{\delta - \beta}{2} = \frac{a - w_c}{a + w_c}\operatorname{tg}\frac{\delta + \beta}{2}$; $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$;

$c = \frac{h_b}{\sin\alpha}$; $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$; $I = \frac{1}{2} b h_b$.

$\gamma = 53{,}38^0$; $\beta = 67{,}03^0$; $\alpha = 59{,}59^0$; $c = 495{,}7$ m; $b = 568{,}6$ m; $I = 121600$ qm.

6) $b = \frac{w_c\sin(\alpha + \frac{1}{2}\gamma)}{\sin\alpha}$; $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)$; $a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$; $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$; $I = \frac{1}{2} ab\sin\gamma$

$b = 26{,}28$ m; $\beta = 74{,}15^0$; $a = 24{,}60$ m; $c = 18{,}15$ m; $I = 214{,}85$ qm.

7) $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s - t_c)}{b \cdot \frac{1}{2} c}}$, wo $s = \frac{1}{2}(b + \frac{1}{2} c + t_c)$; $\operatorname{tg}\frac{\gamma - \beta}{2} = \frac{c - b}{c + b}\operatorname{tg}\frac{\gamma + \beta}{2}$;

$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$; $I = \frac{1}{2} bc\sin\alpha$.

$\alpha = 62{,}16^0$; $\gamma = 79{,}69^0$; $\beta = 38{,}15^0$; $a = 94{,}30$ m; $I = 3056$ qm.

8) $\sphericalangle(a, t_c) = \gamma_2$; $\sin\gamma_2 = \frac{c\sin\beta}{2 t_c}$; $a = \frac{t_c\sin(\beta + \gamma_2)}{\sin\beta}$; $\operatorname{tg}\frac{\gamma - \alpha}{2} = \frac{c - a}{c + a}\operatorname{tg}\frac{\gamma + \alpha}{2}$;

$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$; $I = \frac{1}{2} ab\sin\gamma$.

$a = 26{,}13$ m; $\gamma = 64{,}03^0$; $\alpha = 42{,}54^0$; $b = 37{,}05$ m; $I = 435{,}2$ qm.

9) $\sphericalangle(a, e) = \alpha_1$; $\sin\alpha_1 = \frac{b\sin\alpha}{e}$; $I = be\sin(\alpha - \alpha_1)$. — $I = 78580$ qm.

10) $\sin\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}}$, wo $s = \frac{1}{2}(a + b + e)$ usw.

$\beta = 71{,}58^0$; $\delta = 98{,}36^0$; $c = 12{,}78$ m; $d = 25{,}65$ m; $I = \frac{1}{2}(622{,}9 + 324{,}2) = 473{,}55$ qm.